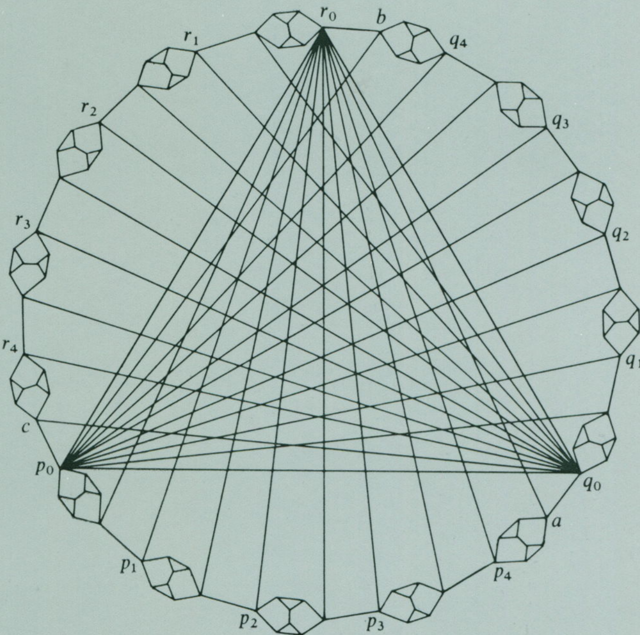
不完全性・非局所性・実在主義

量子力学の哲学序説

マイケル・レッドヘッド

石垣壽郎訳



みすず書房

M. レッドヘッド

不完全性・非局所性・実在主義

量子力学の哲学序説

石垣壽郎訳

みすず書房

INCOMPLETENESS, NONLOCALITY, AND REALISM

A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics

by

Michael Redhead

First published by Oxford University Press,
Oxford, *1987*
© Michael Redhead *1987*
Japanese translation rights arranged with
Oxford University Press

まえがき

この本は，役に立つこと，形而上学的な霧を追い払うこと，そして，読者を説得して議論に参加し展開してもらうこと，これらのことを意図している．ロンドンとオクスフォードでの学生たちから量子力学に関する本の推薦を依頼され，結局，私自身が書くことになってしまったけれども，私は彼らに感謝している．本書は，哲学専攻の人だけでなく物理学専攻の人たちにも読んでもらいたいと思っている．私は両方の分野の人々のためにこの本を書いたのである．非相対論的量子力学と，線形代数学の基礎的事項について，ほんの通り一遍の知識しか仮定せずに，ほとんどすべてのことを，著述が進むにつれて説明するようにしておいた．技術的な事柄が議論を分かりにくくしないように，徹底して努めたつもりである．

多くの友人や同僚たち，特に，ハインツ・ポスト，ジョン・ドーリング，アーサー・ファイン，アブナー・シモニー，リチャード・ヒーリー，ジョン・ルーカス，ジェレミー・バタフィールド，そしてロム・ハレの援助を認めなければならない．この本で論じられている事柄について，さまざまな機会に彼らが与えてくれたコメントは貴重であった．私の大学院学生，特にハーヴェイ・ブラウンとピーター・ヘイウッドにも感謝する．彼らは，いくつかの考えを私と一緒に展開してくれた．もちろん，誤りや誤解はすべて私のものである．理論物理学の手解きをしてくれたレオナルド・カスティレジョにも言及しておきたい．さらに，なぐり書きの原稿にもひるまずに，果敢にタイプしてくれたマリー・ルイーズ・ヴァリチョンにも感謝しておきたい．

この本を妻ジェニファーに捧げる．彼女の励ましがなかったならば，書き始めることすらできなかったであろう．

1986年2月，ロンドン　　　　MLGR

第2刷へのまえがき

この第2刷を機会に，多くのミスプリントを正すことができた．詳細なリストを提供してくれた注意深い読者に感謝したい．

本文の主要な内容に関して，重要なコメントを付け加えておきたい．それは，4.4節で与えた確率的隠れた変数理論の完全性条件が破られることの議論に関連しており，また2つのスピン½粒子の1重項状態の非ロバストネス（nonrobustness）に関するその後の研究，および遠隔感応（passion-at-a-distance）というシモニーの考えにたいする関係に関わっている．本文で私は，量子力学的相関を説明する2つの選択肢を考察した．1つは，粒子源の隠れた状態から生じる〈共通〉原因という考えであり，2つめは，〈直接的な〉確率的連結の考えである．第1の選択肢は，ジャレットの完全性（あるいは，シモニーが言うところの帰結の独立性）を満たさないことによって排除される．第2は，感応の仕方の問題となる．しかし，第3の可能性，つまり，付加的な直接的相互作用が共通原因を覆っている（overlay）という可能性がある．この第3の可能性のもとでは，「感応」的連結が共通の原因を覆うのではなくて，確率的な〈因果的〉連結のみが共通原因を覆いうる．これは，Redhead（1989）で示された．感応の仕方と，特殊相対論的制約との平和共存の可能性は，粒子源の隠れた状態からの寄与を考えずに，本文で数学的に記述したように，直接的な「相互作用」だけで相関が生じると解釈したときにのみ生じてくる．しかし，これが実質的に意味するのは，相関を理解し同時に特殊相対論との衝突を回避する方法としては，確率的な隠れた変数の枠組みをあきらめる，ということである．感応の考えは，確率的隠れた変数による考えの変形なのではなくて，より適切には，その拒絶と解されるべきなのである（鏡像相関とベルの不等式の破れを受け入れうる因子分解不能の形においてでも，そうである）．

さらに，誤解をさけるために次の点に注意しておきたい．確率的因果性に対

するロバストネス（robustness，頑健性の意）条件は，原因における小さな変化が結果における小さな変化をひきおこすという意味での安定性とはなんの関係もない．ロバストネスは，十分小さな摂動のもとでは結合の関数形が不変であるということにのみ関係しているのである．さらに次の点にも注意しておかなければならない．ロバストネス条件は，「非マルコフ的」因果過程の場合に必ず破られるわけではない．そこでは，1つの事象の生じる仕方が，他の事象の原因のなかに組み込まれることになる．主張されているのは，原因全体のなかに先行事象を組み込む過程の〈どこかの段階で〉ロバストネスが救われなければならないということなのである．さもなければ，われわれは，原因の概念が使えない「マシュマロ」のような世界に住むことになるだろう．加えて，私の論文（1989）では，次のことも示されている．一般に，非決定主義的な枠組みでは，ロバストネスは，信号の送達能力とは論理的に独立である．より正確に述べると，十分に弱い摂動のクラスを考えるとき，そのクラスのもとでロバストネスが成立しないことを，そのクラスの摂動による信号送達の不可能性から演繹することは，一般にはできない．しかし，逆に，局所的周辺確率に対する任意の制御を十分に許すような摂動のもとで信号を送れないことから，非ロバストネスが含意されることは，やはり正しい．

この中身の濃い説明の他にも，議論をより最新なものにするために，いくつかの文献解題を付け加えておいた．新しい文献表は，以前の表の補遺として載せてある．〔本訳書ではひとつにまとめた．〕

ウォルフソン・カレッジ，ケンブリッジ
1988年11月　　MLGR

謝　辞

関連する出版物からの資料をこの本に収めることについて，版権上の許可を与えてくれた下記雑誌および出版社に感謝する．

Indiana University Mathematics Journal: Kochen and Specker (1967).

D. Reidel Publishing Company: Redhead (1983).

Plenum Publishing Corporation: Heywood and Redhead (1983).

The New York Academy of Science: Redhead (1986b).

訳語について

現在，“……ism”なる英語に対して（他の欧米語に対しても），「……論」と「……主義」という日本語が訳語として混在している．たとえば，“idealism”は「観念論」，“naturalism”は「自然主義」と訳され，また“empricism”は「経験論」とも「経験主義」とも訳されている．しかし，「資本論」と「資本主義」，「相対論」と「相対主義」が日本語として異なる意味を持っているように（もちろん，対応する英語も異なっている），同類の“……ism”を「……論」と訳したり，「……主義」と訳したりしないほうが適切であろう．したがってこの訳書では，“……ism”がある立場なり見方を表わしている場合には，慣用によらず一貫して「……主義」と訳した．「実在主義」(realism)，「決定主義」(determinism) などがその例である．

本文中の〔 〕内は訳者による補足である．

目　　次

序　　章 …… 1

1　量子力学の形式 …… 11

1.1　ディラックの定式化 …… 12
1.2　フォン・ノイマンの定式化 …… 18
1.3　オブザーバブルの関数 …… 22
1.4　論理－代数的接近法 …… 28
1.5　グリーソンの定理 …… 33
1.6　多粒子系の量子力学 …… 36
1.7　量子力学における角運動量 …… 38
1.8　合成系の角運動量 …… 46
注と参考文献 …… 49

2　量子力学の解釈 …… 50

2.1　見解A: 隠れた変数 …… 52
2.2　見解B: 傾向性と潜在性 …… 54
2.3　見解C: 相補性 …… 56
2.4　測定と状態準備 …… 58
2.5　不確定性関係 …… 66
注と参考文献 …… 76

3　アインシュタイン－ポドルスキー－ローゼンの不完全性論証 …… 79

注と参考文献 …… 90

4　非局所性とベルの不等式 …… 91

4.1　ベルの不等式 …… 91
4.2　反事実的事象と非決定主義 …… 100
4.3　ベルの不等式の変形 …… 107

4.4　確率的隠れた変数理論 …… 109
4.5　ベルの不等式に対する実験的テスト …… 118
4.6　統計的非局所性 …… 125
4.7　結論の要約 …… 129
注と参考文献 …… 129

5　コッヘン－シュペッカーのパラドクス …… 132
5.1　矛盾の証明 …… 134
5.2　FUNC の正当化 …… 145
注と参考文献 …… 153

6　非局所性とコッヘン－シュペッカーのパラドクス …… 154
6.1　文脈性と非局所性 …… 154
6.2　同時測定可能値の規則 …… 157
6.3　CVR と局所性の非両立性 …… 162
6.4　含　　意 …… 166
注と参考文献 …… 167

7　実在主義と量子論理 …… 168
7.1　論理の改訂可能性 …… 168
7.2　古典命題論理 …… 170
7.3　古典物理学の論理 …… 173
7.4　量子命題論理 …… 176
7.5　パトナム状態と実在主義 …… 180
注と参考文献 …… 184

8　結　　び …… 185
注と参考文献 …… 186

数学的付録 …… 187
訳者による補足 …… 198
参考文献 …… 203
訳者あとがき …… 213
索　　引 …… 217

序　　章

過去数年の間，特に，今では有名なベルの不等式の発見（1964 年）以来，そして，コッヘン－シュペッカーの，一見それと無関係な，しかし同じように重要な仕事（1967 年）以来，量子力学の哲学において刺激的な仕事がなされてきている．本書の目的は，そのいくつかを，できるだけ直截簡明に提示することにある．これら生産的な 2 論文以来，それらのテクニックを展開し適用する多くの論文が書かれてきた．しかし，ほぼ 20 年後の現在，塵はおさまり始めており，われわれは，量子力学についていったい何を学んだのか，そして，それがアインシュタインとボーアの論争という古典時代にどう関係しているのかについて，再検討を試みることができるだろう．1935 年，アインシュタイン－ポドルスキー－ローゼンは不完全性の論証を提出し，ボーアがそれに反駁したとされたが，これが彼らの論争の頂点であった．ボーアは，事実上，論争の勝利者と宣言され，ほぼ 30 年間にわたってコペンハーゲン派が正教として君臨することになった．そうなったもう 1 つの要因は，フォン・ノイマンの証明という死神の手であった．彼は，量子力学が提供する状態よりももっと完全に系の状態を指定することが不可能であること——量子力学におけるいわゆる「隠れた変数」の不可能性——を証明したのであった．この証明は，フォン・ノイマンの，宣告者たるにふさわしい 1932 年出版の著作『量子力学の数学的基礎』——その数学的難解さのゆえに，物理学者には，しばしば言及されるわりには実際に読まれていない書物——のなかで詳細に述べられている．フォン・ノイマンの証明は，1966 年に発表されたベルの有名な論文のなかで注意深く検討され，その欠陥が明らかにされた．ベルの仕事は，1950 年代初めに産みだされたボームの隠れた変数の理論が，実際にどのように機能するか，そして，隠れた変数の不可能性定理をいかにして回避しているかをも詳細に示している．

さらにベルは，グリーソンの定理――これは，フォン・ノイマンの仕事以来量子力学の基礎に関して展開された主要な専門的事柄であるが――との関連を指摘した．1960年代におけるこれらの新しい展開は，量子力学の「実在主義的」解釈についての昔の論争に対する興味をよみがえらせ，量子力学の「完全な」改訂というアインシュタインのプログラムを実行するさいの困難が何なのかを，きわめて明瞭に示した．本質的には，量子力学の解釈にまつわる困難が解消されたのではなくて，これらの困難が何なのかが明らかになったのであった．

第1章では，量子力学の形式に関して必要なすべての題材が集められている．物理学の哲学をするさいに，いつも2種類の問題が生じる．まず，高度に専門的な手法を含むきわめて一般的なメタ定理がある．例えば，量子力学における測定の問題が解決不能であることを示そうとすると，何を測定とみなすかについてのきわめて一般的で抽象的な議論が必要になる．他方では，物理理論の解釈についてのある特定の問題を指摘するために考案された，きわめて単純で高度に理想化された思考実験がある．そこでは，その役割を果たす最も単純な物理学を探すことになる――一般性や手のこんだことを狙う必要はない．われわれは，主として，第2の類の事例を問題にするだろう．このことは，本書で要求される数学や物理学の背景が，かなり少ないことに反映されている．特に，連続スペクトルを持つ作用素に関係する問題に，あからさまにかかずらうことはないだろう．実際たいていは，有限次元ヒルベルト空間に制限することになるだろう．そこでは，自己共役作用素のスペクトル理論が直截に簡単に説明される．基本概念に対する異なる定式化の間で素早い翻訳ができるようになることは，量子力学の哲学の文献を追う上で必須なので，多くの異なった接近法と表記法をも論じておこう．有限次元ヒルベルト空間の典型的な例は，量子力学におけるスピンオブザーバブルを記述するさいに採用されているものである．スピン½とスピン1の系を扱うのに十分な題材をこの章で展開しておく．これらの系を，後の章で事例としてしばしば用いるであろう．

第2章は，第1章で提示された形式の可能な解釈に関係している．多くの異なる接近法を区別し，そして，隠れた変数，傾向性，相補性，測定の問題と混合状態の解釈，量子力学における不確定性関係の意義について，簡単に論じる．もちろん，これらの事柄はすべて，量子力学体系の意義を理解するさいに非常

に重要である．しかし，これらは，この本で扱われる中心的テーマではない．したがって，これらを包括的に扱うような試みはなされない．

第3章で，この本の主要な議論が実際に始まる．ここでは，量子力学体系の不完全性に対するアインシュタイン－ポドルスキー－ローゼンの論証を扱う．ある形の非局所的作用を受け入れるか不完全性を認めなければならない，という形で，実際に1つのジレンマを提示する．非局所性を拒否して，アインシュタイン，ポドルフスキー，ローゼンは，不完全性のほうの角（つの）をつかんだ．しかし，これから示唆されるプログラムは，量子力学の体系で行なわれているよりも包括的に系の状態を指定することによって，量子力学を「完全にする」というものである．

第4章では，この「完全化」プログラムが，いわゆるベルの不等式を破る十分確かめられた実験結果によって，それ自身の非局所性の困難に陥っていく有様を示す．こうして，もとのジレンマの角（つの）は両方とも，ある形の非局所性に通じるように見える．しかし，この結論は，実際に何が起きているのかを明らかにするためには，慎重な議論を必要としている．この章では，非局所性問題について，できるだけ明晰な評価を与えるよう試みる．

しかし非局所性は，「完全化された」量子力学が直面する唯一の困難ではない．それとはまったく異なり純粋に代数的な問題が，いわゆるコッヘン－シュペッカーのパラドクスによって提示されている．これは第5章で論じる．そして，いかにして，このパラドクスを回避しながら，同時に量子力学の解釈に対して実在主義的見方を保持するかという問題を論じる．

次に第6章では，非局所性の問題とコッヘン－シュペッカーのパラドクスとの関連を吟味し，両者にはきわめて密接な関係があることを明らかにする．この関係によって，非局所性に対するほとんど純代数的な（完全に純代数的ではないが）性格の証明を与えることが可能になる．

第7章では，実在主義に対するまったく異なる方向からの攻撃を探究する．これは，量子論理的接近法であり，過去15年かそこら，大いに論じられてきているテーマである．第7章で採用される立場は，何人かの量子論理学者の誇張的な主張に対して，率直に言って，批判的である．しかし，くり返すが，この議論の目標は，量子力学の哲学にも論理の哲学にも同じように関係するき

わめて重要な問題を明晰化することにある.

最後の短い章において，議論の糸をまとめるように努める．1960年代半ば以降現われた厖大な，人を混乱させるような，時には矛盾している文献は，多くの場合，量子力学の哲学を学ぼうとする学生たちを啓発するよりも，むしろ困惑させているのであるが，私は，量子力学の解釈について，このような文献から合理的に学びうることが何なのかを要約するよう試みる.

各章の最後に，「注と参考文献」という節を含める．これは実際，（かなり選別的な）文献解題であるが，論じられたほとんどの観念の歴史的展開を跡づけるのに役立つ．これらの節で，著者と年（例えば，Bell（1966））でふれた文献は，この本の最後により専門的に詳しくアルファベット順に集められている.

集合論，ベクトル空間，束についての大事な結果は，数学的付録に要約する．それは，純粋に数学的事項の議論で主要な本文を中断しないためである.

最後に，式の番号付けと参照の仕方について注意しておく．各章のなかで，式は順番に——1，2，3，等——番号を付ける．同じ章の式の参照には，この番号だけを引用する．異なる章の式の参照には，章番号を付ける．したがって，第3章のなかで式（2.33）への参照は，第2章の式（33）を指す.

1　量子力学の形式

量子力学の形式は，原子あるいはそれ以下の系が示す２つの特徴を取り込むように作られている．第１の特徴は，そのような系に対してある物理量を測定したときに得られる可能な結果が，（実数）値のある集合に制限されること．第２は，どの物理量に対しても，どの値が測定の結果生じるかを予測することは一般に不可能であって，その集合に属する個々の可能な値に対して，それが生じることを確率的にしか予測できないこと，である．測定可能な物理量は，オブザーバブルと呼ばれ，オブザーバブルに対する測定結果の確率を指定することは，問題の系にどの状態が指定されているかに依存する．言いかえると，系の状態とは，すべてのオブザーバブルの可能な測定結果に対する確率を表現するものに他ならない．したがって，量子力学の数学的側面を図式的に述べると，こうなる．まず，ある数学的構造を設定し，その構造におけるある要素を物理系の状態に対応づけ，別のある要素をオブザーバブルに対応づける．そして，２つの基本問題：

1. 任意の与えられたオブザーバブルに対して，その測定結果の可能な値は何か？
2. 任意の与えられた状態とオブザーバブルに対して，測定がなされたとき，測定結果の可能な値の１つが現実に生じる確率は何か？

に答えるアルゴリズムを提出する．第１の問いに答えるアルゴリズムを**量子化アルゴリズム**，第２の問いに答えるアルゴリズムを**統計アルゴリズム**と呼ぼう．

読者は，われわれが２つのアルゴリズムを導入したことに，疑問を感じるかもしれない．というのは，量子化アルゴリズムから生じる数は，統計アルゴリズムによって，ある状態においてゼロでない確率をもつ数と同一視されるのが普通だからである．あるいは別の言い方をすると，測定結果の確率がつねにゼ

ロになる数は測定の結果とはなりえないからである．しかし，こういう考えは端的に誤りである．ゼロ確率は，けっして不可能性ではない．たとえば，確率に対する通常の相対頻度解釈をとると，無限個の結果の集合において，ある値が有限回出現することと，その値に対する確率がゼロであることとは両立する．逆の命題，つまり，ある値が測定結果としてけっして生じないならば，この値に対する確率がゼロであるという命題は，もちろん正しい．そして，2つのアルゴリズムは，この正しい帰結を満足するような仕方で，調和していなければならない．

2つの基本的アルゴリズムを表現する多くの方法がある．われわれは，ディラックによる方法から始めよう．

1.1 ディラックの定式化

その数学的構造は，複素数体上の，内積をもつ抽象的**ベクトル空間** V（詳細は，数学的付録を見よ）で，内積を次のように書く：

α と β を V の任意のベクトルとするとき，α と β の内積は，複素数であって，

$$\langle\alpha|\beta\rangle \tag{1}$$

と書かれ，

$$\langle\beta|\alpha\rangle=(\langle\alpha|\beta\rangle)^* \tag{2}$$

ここに，* は共役複素数を表わす．

ディラックは，α や β のようなベクトルを $|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$ と表わし，**ケット**と呼んでいる．さらに，彼は，**ブラ**と呼ばれる双対ベクトルを導入し，$\langle\alpha|$，$\langle\beta|$ などと表わす．双対ベクトルとは，ベクトル空間上の線形汎関数であって，ベクトル $|\beta\rangle$ に対する $\langle\alpha|$ の値は，しばしば $\langle\alpha|$ と $|\beta\rangle$ の縮約と言われ，関数の表記法では $\langle\alpha|(|\beta\rangle)$ と書かれるべきものであるが，ディラックはこれを $\langle\alpha|\beta\rangle$ と略記する．さて，一般に，任意の双対ベクトル $\langle\alpha|$ に対して，$\langle\alpha|(|\beta\rangle)=(|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ の内積$)=\langle\alpha|\beta\rangle$（(1) の表記法で）を満足するケット $|\alpha\rangle$ の存在を示すことができる．したがって，記号 $\langle\alpha|\beta\rangle$ を，ケット $|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$ の内積として，または，ブラ $\langle\alpha|$ とケット $|\beta\rangle$ の縮約として考えることができる．

最初に，有限次元の V に話を限ろう

状態は，V の単位ベクトルに結びつけられ，オブザーバブルは，V 上の自己共役線形作用素と結びつけられる．われわれは複素数体を扱っているから，状態は，絶対値 1 の位相因子を任意として，定まるにすぎない．実際，のちに見るように，ここで決定的に重要なのは，単位ベクトルが生成する 1 次元部分空間，**射線**である．

さしあたりわれわれは，すべての自己共役作用素が一意にオブザーバブルに結びついていると，仮定する．この仮定は，のちにゆるめられる（第 5 章を見よ）．

自己共役作用素 $\hat{Q}$ を考えよう．これは

$$\hat{Q}\,|q_i\rangle = q_i\,|q_i\rangle \tag{3}$$

を満足する固有ベクトル $|q_i\rangle$〔$\neq 0$〕をもつ．ここに，q_i は $\hat{Q}$ の固有値と言われるある実数であり，i は，N をベクトル空間の次元として 1 から N まではしる．q_i はすべて異なる場合があり，このとき $\hat{Q}$ は縮退がない，あるいは極大という．2 つ以上の q_i の値が等しいとき，縮退しているという．$|q_i\rangle$ を固有値 q_i をもつ i 番目の固有ベクトルとする．したがって，固有ベクトルは，数値 q_i ではなくて，添え字 i によって表示される．$\{|q_i\rangle\}$ を，V における正規直交ベクトルの完全集合をなすように選ぶことができる．これは

$$\langle q_i|q_j\rangle = \delta_{ij} \tag{4}$$

を意味し，V の任意のベクトル $|\psi\rangle$ が $|q_i\rangle$ の 1 次結合で書けることを意味する．したがって，

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\,|q_i\rangle \tag{5}$$

であり，複素係数 c_i は

$$c_i = \langle q_i|\psi\rangle \tag{6}$$

で与えられる．いまや，われわれは，2 つのアルゴリズムを述べられるところまできた．

量子化アルゴリズム

Q の可能な測定結果は，対応する作用素 $\hat{Q}$ の固有値である．

作用素とオブザーバブルをはっきり区別する必要があるときは，作用素を示

すのに ^（ハット）を付けることにする．これは，第5章と第6章における議論の展開において，特に重要である．それ以外では，オブザーバブルと，それに対応する作用素に対して，同じ記号を採用する．

統計アルゴリズム

系の状態が $|\psi\rangle$ のとき，Q が測定結果 q_i を生じる確率は

$$\mathrm{Prob}(q_i)_Q^{|\psi\rangle} = \sum_{j|q_j=q_i} |c_j|^2 = \sum_{j|q_j=q_i} |\langle q_i|\psi\rangle|^2 \tag{7}$$

で与えられる．ここに，記号 $(q_i)_Q^{|\psi\rangle}$ は，状態 $|\psi\rangle$ における Q の測定結果が q_i であるという命題を表わし，$\sum_{j|q_j=q_i}$ は，$q_j=q_i$ なる j の値すべてについての和を表わすために用いる．

縮退があるときは，$\{|q_i\rangle\}$ の選択は決して一意ではないが，異なる選択をしてもすべて確率に対しては同じ結果を生じることに注意しておかなければならない．

状態 $|\psi\rangle$ における Q の測定結果の平均値あるいは期待値は

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle_{|\psi\rangle} &= \sum_{i=1}^{N} q_i|c_i|^2 \\ &= \langle\psi|Q|\psi\rangle\end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる．測定結果が値の集合 Δ の中にある確率がどうなるかを，問うこともできる．ただし，$\Delta=\{q_\alpha, q_\beta, \ldots\}$ は，Q の異なる固有値の集合，つまり**スペクトル** S_Q の部分集合である．

答えは，明らかに

$$\mathrm{Prob}\ (\Delta)_Q^{|\psi\rangle} = \sum_{j|q_j=q_\alpha,\ q_\beta,\ \ldots} |\langle q_i|\psi\rangle|^2 \tag{9}$$

となる．$(\Delta)_Q^{|\psi\rangle}$ は，状態 $|\psi\rangle$ における Q の測定結果が集合 Δ の要素であるという命題を表わすのに便利な記号である．厳密にいうと，これは，記号 $(q_i)_Q^{|\psi\rangle}$ の使い方と完全に整合的だというわけではないが，1要素集合とその唯一の要素との相違は，つねに文脈から明らかであろう．

最後に，系が，状態 $\{|\psi_k\rangle\}k=1, 2, \ldots, m$ の集合の中のどれに実際にあるかを，われわれが知らないと仮定し，この知らないことを，確率的な重み

w_kを導入して表現しよう．ただし，w_kは，系の量子力学的状態が$|\psi_k\rangle$であることを見出す確率であり，$\sum_{k=1}^{m} w_k=1$である．このとき，Qの測定結果が集合Δにある確率は，より一般的な式

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{j|q_j=q_\alpha,\ q_\beta,\ \dots} |\langle q_j|\psi_k\rangle|^2 \qquad (10)$$

で与えられる．量子力学の形式的な数学的表現を完成するために，さらに扱うべき2つの問題がある：

1. 作用素－オブザーバブルの対応関係はどのように設定されるか？
2. 系の状態は時間とともにどのように変化するか？

第1の問題は，対応原理によって答えられる．対応原理は，古典力学における2つの力学量のポアソン括弧を，対応する作用素の交換子括弧に結びつける．図式的には

$$(\text{ポアソン括弧}) \to \frac{1}{i\hbar} \times (\text{交換子括弧})$$

ただし，$\hbar=h/2\pi$で，hは，近似値6.6×10^{-34}ジュール・秒の有名なプランク定数である．

例として，

$$\{J_x,\ J_y\}=J_z \qquad (11)$$

を満足する角運動量のデカルト成分J_x, J_y, J_zに対するポアソン括弧の関係を考えよう．ただし，2つの力学量A, Bのポアソン括弧$\{A, B\}$は，力学系の状態を指定する一般化座標q_iと共役運動量p_iを用いて

$$\{A,\ B\}=\sum_i\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right) \qquad (12)$$

で定義される．ポアソン括弧を交換子括弧で置き換えると

$$[J_x,\ J_y]=i\hbar J_z \qquad (13)$$

等となる．ただし，交換子括弧は任意の作用素AとBに対して

$$[A,\ B]=AB-BA \qquad (14)$$

で定義される．

作用素の間のこれらの代数的関係式は，ベクトル空間のユニタリ変換によって不変であることに注意しよう．また，作用素の固有値スペクトルや，統計ア

ルゴリズムの示す確率も，同様に，不変である．

いま概略を述べた抽象的数学的構造を具体的に表現しよう．つまり，自己共役作用素はN×Nエルミート行列で，状態ベクトルはN×1列ベクトルで，具体的に表現しよう．すると，ベクトル空間に対して異なる正規直交基底を選ぶことに応じて，異なる表現が得られ，異なる基底はユニタリ変換で結びついている．

具体的な行列表現を用いることによって，われわれは，量子力学に対するディラックの抽象的ベクトル空間の定式化から，「行列力学」としばしば呼ばれている定式化に移ることになる．歴史的にいうと，実際には，ハイゼンベルクは，より抽象的なディラックの手法に先だって，行列力学を展開したのであった．

ここまで，われわれは，議論を有限次元の状態空間に限ってきた．しかし，ディラックは，彼の取り扱いを無限次元の場合に拡張しようと試みた．発見的に彼は，連続固有値スペクトルをもつ作用素を考察し，式（5）における和を積分で置き換えた．たとえば，1次元の配位空間における位置の場合，ディラックは，位置のオブザーバブルを，連続固有値 x をもち

$$X|x\rangle = x|x\rangle \tag{15}$$

を満たす作用素 X として書き表わした．そうすると，任意の状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\psi\rangle |x\rangle \mathrm{d}x \tag{16}$$

と展開される．関数

$$\psi(x) \underset{Df}{=} \langle x|\psi\rangle \tag{17}$$

は波動関数として知られている．

ケット $|x\rangle$，$|x'\rangle$ は直交関係

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x') \tag{18}$$

を満足する．ここに，$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数で，任意の関数 $f(x)$ と任意の $-a$ と b（a，$b>0$）に対して

$$\int_{-a}^{b} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{19}$$

を満足する．（18）から，$\langle x|x\rangle = \delta(0) = \infty$ であるから，$|x\rangle$ のノルムが無限大になることに注意しよう．デルタ関数は，（汎関数と区別される意味での）

関数と考えると，数学的には意味がない．しかし，発見的手法としてはきわめて便利であり，位置や運動量の作用素を論じるときには，本書においても自由に使うことにする．X に正準共役な運動量 P に対して，波動関数は

$$\langle x|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ipx} \tag{20}$$

となる．$|p\rangle$ は，固有値 p に属す運動量の固有ベクトルである．（ここで，$\hbar=1$ となる単位を用いている．）ケット $|p\rangle$ と $|p'\rangle$ は，(18) と同様な直交関係

$$\langle p|p'\rangle=\delta(p-p') \tag{21}$$

を満足する．有用な形式的表現

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\mathrm{d}p \tag{22}$$

を与えておこう．さて

$$\begin{aligned}\psi(p)\underset{Df}{=}\langle p|\psi\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\psi(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{23}$$

は，運動量空間における波動関数である．

$\psi(x)$ と $\psi(p)$ は，次のように解釈される．$|\psi(x)|^2$ と $|\psi(p)|^2$ は，それぞれ，X の値を x の近傍に見出す確率密度，P の値を p の近傍に見出す確率密度を与える．すなわち，たとえば，x と $x+\mathrm{d}x$ の間の領域に X の値を見出す確率が，$|\psi(x)|^2\mathrm{d}x$ である．

系のエネルギーに対する固有値問題は，形式的には，ある微分方程式，いわゆる時間を含まないシュレーディンガー方程式を解くことに還元される．無限次元の場合にこれを拡張するときにディラックが採用した数学的手法は，不幸にして，まったく整合的でない．その問題を扱うはるかに満足すべき方法が，フォン・ノイマンによってどのように考案されたかを，すぐ後で見ることにしよう．

しかしわれわれは，状態が時間によってどのように展開するかの問題をまだ扱っていない．これは，ディラックの表現においては，状態ベクトルに適用される時間依存的ユニタリ変換

$$|\psi(t)\rangle = U(t,\ t')\,|\psi(t')\rangle \tag{24}$$

によって記述される．時間を含まないハミルトニアンHによって系が支配されている場合には，形式的に

$$U(t,\ t') = e^{-i/\hbar\cdot H\cdot(t-t')} \tag{25}$$

である．

ついでに，量子力学における時間発展を議論する際に生じている用語の混同とでも言うべきことがらにふれておこう．変化する状態ベクトルと変化しないオブザーバブルについていま記述した方法は，**シュレーディンガー描像**と呼ばれている．というのは，そのような方法は，波動力学において，いわゆる**時間を含むシュレーディンガー**方程式（系のエネルギー固有値を与える時間を含まない方程式とは，厳格に区別しなければならない）と結びついているからである．しかし，状態ベクトルの時間依存性を相殺するような仕方で，状態（ベクトル）とオブザーバブル（作用素）の両方に作用する時間依存的ユニタリ変換を導入して，別の仕方で，時間発展を記述することも可能である．こういうやり方の最終結果は，時間依存性を状態からオブザーバブルに移すことになる．その結果得られる量子力学における時間発展の記述は，**ハイゼンベルク描像**として知られている．時間依存性が，一部は状態と結びつけられ，一部はオブザーバブルと結びつけられているような，中間的状況もまた可能である．そのような中間的描像の1つは散乱理論において重要であり，これもまた混乱のもとではあるが，**ディラック描像**と呼ばれている．そこでは，相互作用のないときは，状態は一定であるが，他方，相互作用があるときでも，オブザーバブルは，摂動のないハミルトニアンにしたがって時間発展する．4.6節において，一般的な信号送達不能定理を証明する際に，ディラック描像を用いることになるだろう．

1.2　フォン・ノイマンの定式化

再び，N次元の有限次元状態空間における完全に整合的なディラックの表現から始めることにしよう．オブザーバブルは，再び，自己共役作用素と結びつけられ，測定結果の可能な値は，量子化アルゴリズムによって，これらの作用素の（実）固有値と同一視される．ディラックとの違いは，統計アルゴリズム

の表現法にある.

射影作用素の概念を導入することから始めよう. オブザーバブル Q に対して, 線形作用素

$$P_{|q_i\rangle}=|q_i\rangle\langle q_i| \tag{26}$$

を考えよう. これが線形作用素であることは, 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対する $P_{|q_i\rangle}$ の作用

$$\begin{aligned} P_{|q_i\rangle}|\psi\rangle &= |q_i\rangle\langle q_i|\psi\rangle \\ &= c_i|q_i\rangle \end{aligned} \tag{27}$$

を考えてみれば, 明らかである. $|\psi\rangle$ に作用して $P_{|q_i\rangle}$ は, 式 (5) の展開における成分 $c_i|q_i\rangle$ を写しだす.

このことが, $P_{|q_i\rangle}$ を射影作用素と呼ぶ理由なのである. その定義域は, ベクトル空間 V 全体である. しかし, その値域は, ちょうど $|q_i\rangle$ が張る1次元部分空間になっている.

$\sum_i P_{|q_i\rangle}|\psi\rangle=\sum_i c_i|q_i\rangle=|\psi\rangle$ であるから, 明らかに,

$$\sum_i P_{|q_i\rangle}=I \tag{28}$$

ただし, I は恒等作用素を表わす. したがって, $\sum_i P_{|q_i\rangle}$ は, 任意のベクトル $|\psi\rangle$ に作用して, 再び同じ $|\psi\rangle$ を生じる.

さて,

$$\begin{aligned} Q=Q\cdot I=Q\sum_i P_{|q_i\rangle} &= \sum_i QP_{|q_i\rangle} \\ &= \sum_i Q|q_i\rangle\langle q_i| \\ &= \sum_i q_i|q_i\rangle\langle q_i| \\ &= \sum_i q_i P_{|q_i\rangle} \end{aligned} \tag{29}$$

と書くことができる. これを, **スペクトル定理**と呼ぼう. ここに得られた結果が, 無限次元の場合に厳密に一般化される. もっとも, そのためには, 作用素のスペクトルに対して, 固有値の概念を用いない定義が必要となるし, また, 式 (29) において, どのようにして和を積分に置き換えるかの議論も必要になる. われわれは, こういった専門的な事柄に入り込む必要はないが, 詳細につ

いては von Neumann (1932) をあげておこう.

スペクトル定理を導く別の方法は, $|q_i\rangle$ を基底として得られる表現を用いるやり方である. そのような基底のもとで, Q は対角行列

$$Q=\begin{pmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & q_3 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

となり, さらに

$$P_{|q_1\rangle}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

$$P_{|q_2\rangle}=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

等である. そうすると,

$$Q=q_1P_{|q_1\rangle}+q_2P_{|q_2\rangle}+\ldots$$

となることは, いまや自明である. 作用素の間の代数的関係は, 表現〔を与える基底〕の選択に依存しないから, ここで, 特定の (便利な) 基底に対してスペクトル定理を証明しても, 抽象的な作用素に対する結果の正しさには影響しない.

統計アルゴリズムにもどって, まず, 縮退のない固有値 q_i を考え,

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\,(q_i)_Q^{|\psi\rangle} &= |\langle q_i|\psi\rangle|^2 \\ &=\langle q_i|\psi\rangle\langle\psi|q_i\rangle \\ &=\sum_j \langle q_i|\psi\rangle\langle\psi|P_{|q_j\rangle}|q_i\rangle \\ &=\sum_j \langle q_i|\psi\rangle\langle\psi|q_j\rangle\langle q_j|q_i\rangle \\ &=\sum_j \langle q_j|q_i\rangle\langle q_i|\psi\rangle\langle\psi|q_j\rangle \\ &=\mathrm{Tr}\,((|q_i\rangle\langle q_i|)(|\psi\rangle\langle\psi|)) \\ &=\mathrm{Tr}\,(P_{|q_i\rangle}\cdot P_{|\psi\rangle}) \qquad (30)\end{aligned}$$

と書く．ここに，$P_{|\psi\rangle}$ は，$|\psi\rangle$ が張る1次元部分空間を値域とする射影作用素であり，Tr は，行列のトレース，つまり対角成分の和を表わす．

これがわれわれの基本的な結果であり，この結果を多くの重要な方向に一般化することができる．

q_i が縮退しているとしよう．このとき

$$P_Q(q_i)=\sum_{j|q_j=q_i} P_{|q_j\rangle} \tag{31}$$

と定義する．$P_Q(q_i)$ も射影作用素であることは明らかであり，その値域は，$q_j=q_i$ なる固有ベクトル $|q_j\rangle$ 全体が張る部分空間である．この場合，トレース演算の線形性から

$$\mathrm{Prob}(q_i)_Q^{|\psi\rangle}=\mathrm{Tr}(P_Q(q_i)\cdot P_{|\psi\rangle}) \tag{32}$$

同様に，測定結果が集合 $\Delta=\{q_\alpha, q_\beta...\}$ にある確率は

$$\mathrm{Prob}(\Delta)_Q^{|\psi\rangle}=\mathrm{Tr}(P_Q(\Delta)\cdot P_{|\psi\rangle}) \tag{33}$$

ただし，

$$P_Q(\Delta)=\sum_{j|q_j=q_\alpha,\ q_\beta,\ \dots} P_{|q_j\rangle} \tag{34}$$

は，$q_j=q_\alpha$，q_β，... なるすべての $|q_j\rangle$ が張る部分空間を値域とする射影作用素である．

系が見出される状態の集合 $\{|\psi_k\rangle\}$ に確率的な重み w_k を与えるような，より一般的な場合には，Q に対する測定結果が集合 Δ にある確率は $\mathrm{Tr}(P_Q(\Delta)\cdot W)$ となる．ただし

$$W=\sum_k w_k P_{|\psi_k\rangle} \tag{35}$$

W は，系に対する**統計作用素**として知られている．W 自身は一般に射影作用素でないことに注意しよう．W が1項のみからなるとき，**純粋状態**という．いくつかの w_k がゼロでない一般的な場合は，**混合状態**として知られている．

基本的な結果は

$$\mathrm{Prob}(\Delta)_Q^W=\mathrm{Tr}(P_Q(\Delta)\cdot W) \tag{36}$$

となる．W は統計作用素によって系の状態を示している．したがって，いまやすべてのことは，ディラックの表現のようにベクトルを用いるのではなくて，射影作用素によって表現されている．

さらに，状態 W における Q の期待値についての結果

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle_W &= \sum_i q_i \operatorname{Tr}(P_{|q_i\rangle}\cdot W)\\ &=\operatorname{Tr}\left(\sum_i q_i P_{|q_i\rangle}\cdot W\right)\\ &=\operatorname{Tr}(Q\cdot W) \qquad (37)\end{aligned}$$

に注意しておこう．

1.3 オブザーバブルの関数

再び，自己共役作用素のスペクトル分解

$$Q=\sum_i q_i P_{|q_i\rangle}$$

を考えよう．射影作用素の直交性

$$\begin{aligned}P_{|q_i\rangle}P_{|q_j\rangle} &= |q_i\rangle\langle q_i|q_j\rangle\langle q_j|\\ &=\delta_{ij}|q_i\rangle\langle q_j|\\ &=\delta_{ij}|q_i\rangle\langle q_i|\\ &=\delta_{ij}P_{|q_i\rangle} \qquad (38)\end{aligned}$$

から，即座に

$$Q^2=\sum_i q_i^2 P_{|q_i\rangle}, \qquad Q^3=\sum_i q_i^3 P_{|q_i\rangle}$$

のような簡単な結果が得られる．より一般的には，p が多項式ならば，

$$p(Q)=\sum_i p(q_i)P_{|q_i\rangle}$$

さて，この結果を一般化して，任意の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$（ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合である）に対して $f(Q)$ の意味するところを定義する．

$$f(Q)\underset{Df}{=}\sum_i f(q_i)P_{|q_i\rangle} \qquad (39)$$

この作用素に対応するオブザーバブルをも $f(Q)$ で表わそう．この定義において明らかなように，f は Q のスペクトルを含む集合 S_Q への**制限**のみを考えておけばよい．しかし，実数全体の上で定義された関数を考えておいたほうが便利な場合もしばしばある．

例として，射影作用素 $P_Q(q_i)$ の1つを Q の関数として表わそう．明らかに

$$P_Q(q_i)=\chi_{q_i}(Q) \qquad (40)$$

ただし，特性関数 $\chi_{q_i}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ は

$$\chi_{q_i}(x)=\begin{cases}1 & (x=q_i)\\ 0 & (x\neq q_i)\end{cases} \tag{41}$$

によって定義される．しかし，実際に必要なことは，

$$\chi_{q_i}(q_j)=\delta_{q_i q_j} \tag{42}$$

で示される制限 $\chi_{q_i}|S_Q$ だけである．$\mathbb{R}$ で定義され，S_Q の点に対しては χ_{q_i} と同じ値をとる関数ならどれでも，$\chi_{q_i}(Q)$ の定義を与えるためには，χ_{q_i} と同様に役にたつ．したがって，q_i が縮退しないとすると，

$$F_{q_i}(x)=\frac{(x-q_1)(x-q_2)\ldots(x-q_{i-1})(x-q_{i+1})\ldots(x-q_N)}{(q_i-q_1)(q_i-q_2)\ldots(q_i-q_{i-1})(q_i-q_{i+1})\ldots(q_i-q_N)} \tag{43}$$

で定義される関数 $F_{q_i}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は，S_Q へ制限すると χ_{q_i} と同じになり，S_Q の要素に対する作用にのみ関心がある場合には χ_{q_i} を「表わす」のに用いられる．(縮退している q_i に対しては，(43) の分母分子から，単に，$q_j=q_i$ に対する因子を除けばよい．)

より一般的には，

$$P_Q(\Delta)=\chi_\Delta(Q) \tag{44}$$

ただし，$\chi_\Delta:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ は

$$\chi_\Delta(x)=\begin{cases}1 & (x\in\Delta)\\ 0 & (x\notin\Delta)\end{cases} \tag{45}$$

によって定義される．χ_Δ は，集合 Δ を「選びだす」特性関数である．

いまや，統計アルゴリズムを

$$\text{Prob}\,(\Delta)^W_Q=\text{Tr}\,(\chi_\Delta(Q)\cdot W) \tag{46}$$

の形に書くことができる．これまで，Δ を Q のスペクトルの部分集合と考えてきた．しかし，明らかに (46) は，Δ が実数の任意の部分集合の場合にも適用できる．スペクトルのどの要素も Δ の要素でないときには，(46) はこの部分集合に確率ゼロを与える．(46) を一般化して，2 つの可換なオブザーバブル Q, Q' が集合 Δ, Δ' に値をもつことを観測する結合確率を

$$\text{Prob}\,(\Delta,\Delta')^W_{Q,Q'}=\text{Tr}(\chi_\Delta(Q)\cdot\chi_{\Delta'}(Q')\cdot W) \tag{47}$$

の形に表わすことができる．左辺の表記法は，Q と Q' の測定結果が集合 Δ と Δ' にあるという命題を表わすための，$(\Delta)^W_Q$ の便利な一般化になっている．われわれは，後に，「2 つの可換なオブザーバブルの同時測定」という言い回し

が正確に何を意味するか，という問題を論じるであろう．いまのところは，可換なオブザーバブルに対する量子力学的な結合確率分布の**定義**として（47）を用いる．

さて，次の定理を証明するために帰結（46）を用いる．

$$\mathrm{Prob}(\Delta)^{W}_{f(Q)}=\mathrm{Prob}(f^{-1}(\Delta))^{W}_{Q} \tag{48}$$

証明：

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\mathrm{Tr}(\chi_{\Delta}(f(Q))\cdot W)\\&=\mathrm{Tr}(\chi_{f^{-1}(\Delta)}(Q)\cdot W)\\&=\text{右辺}\end{aligned}$$

ここに，

$$\chi_{\Delta}(f(x))=\chi_{f^{-1}(\Delta)}(x) \tag{49}$$

を用いた．特性関数のこの性質の正しさは次のことに注意すれば分かる：

$f(x)\in\Delta$ ならば，左辺＝1，したがって，$x\in f^{-1}(\Delta)$ より，右辺＝1．しかし，$f(x)\notin\Delta$ ならば，左辺＝0，したがって，$x\notin f^{-1}(\Delta)$ より，右辺＝0．よって，x のすべての値に対して式（49）の両辺の 2 つの関数は同じ値をとり，したがって関数として等しい．

式（48）で表わされる重要な帰結は，**統計的関数合成原理**として知られており，われわれはこれを STAT FUNC と略記する．

STAT FUNC は，後にコッヘン－シュペッカーのパラドクスを論じるときに，重要な役割を演じる（第 5 章を見よ）．STAT FUNC が

$$\mathrm{Prob}(f(\Delta)^{W}_{f(Q)}=\mathrm{Prob}(\Delta)^{W}_{Q}$$

を述べているのでは**ない**ことに，十分注意しなければならない．これは，f が 1 対 1 写像でないときには一般に正しくない．

Q を極大オブザーバブルとしよう．これは，対応する自己共役作用素が縮退しないこと，つまりすべての固有値が異なっていること，を意味していることを思い出そう．このとき，f が 1 対 1 写像ならば，$f(Q)$ も極大である．しかし，f が多対 1 の写像ならば，$f(Q)$ は縮退している（非極大である）．

さて，Q と R を任意の 2 つの可換なオブザーバブルとしよう．このとき，適当な関数 f と g に対して $Q=f(S)$，$R=g(S)$ なる極大オブザーバブル S がつねに存在する．

この結果を，いつものように有限次元の場合にのみ注目して証明しよう．

証明：　Q と R は可換だから，同時に対角化できる．これは，ある基底 $\{|q_i\rangle\}$ が存在して，その基底に対して，

$$Q=\sum_i q_i P_{|q_i\rangle}$$

と展開でき，さらに，R も

$$R=\sum_i r_i P_{|q_i\rangle}$$

の形に展開できることを意味する．さて，$S=\sum_i s_i P_{|q_i\rangle}$ と書く．ただし，すべての s_i は異なっているとする．したがって，S は極大となる．

このとき，$f: S_S \to S_Q$ と $g: S_S \to S_R$ を

$$f(s_i)=q_i$$
$$g(s_i)=r_i$$

で定義して，

$$Q=f(S)$$
$$R=g(S)$$

を得る．（S_Q はオブザーバブル Q のスペクトルを表わし，S_S はオブザーバブル S のスペクトルを表わしている，等.）したがって，定理は実際の構成によって証明された．

以下のことに十分注意しなければならない．任意のオブザーバブル Q，R と任意の関数 F に対して，もし $Q=F(R)$ ならば Q と R は可換であるが，逆は一般に正しくない——つまり，Q と R が可換であっても，このことはある関数 F に対して $Q=F(R)$ と書けることを意味しない．そのかわり，上に証明した結果が成立するのである．

f または g が1対1であるような，したがって Q または R が極大であるような特殊な場合には，非極大オブザーバブルを極大オブザーバブルの関数として書くことが実際にできる．Q を極大，したがって f を1対1としよう．このとき，f は逆関数をもち，

$$S=f^{-1}(Q)$$

と書くことができる．したがって，$R=g(S)=g(f^{-1}(Q))=F(Q)$，ただし，$F=g\circ f^{-1}$.

任意のオブザーバブル Q に対して，ある極大オブザーバブル S の関数とし

て $Q=f(S)$ と書けたとしても，S の選択は決して一意でないことに注意しよう．

2つの極大オブザーバブル S と R に対して

$$Q=f(S)=g(R) \tag{50}$$

と書けたとしよう．このとき，もし Q が極大ならば，S と R は可換である．

証明：この場合，

$$S=f^{-1}(Q)=f^{-1}(g(R))$$

と書ける．よって，S は R の関数であり，したがって，R と可換である．

しかし，Q が極大でないならば，S と可換でないような R に対して（50）が成立するように R を選ぶことは，つねに可能である．

証明：前と同じように，$S=\sum_i s_i P_{|q_i\rangle}$，$Q=\sum_i q_i P_{|q_i\rangle}$ と書く．ただし，すべての s_i は異なり，いくつかの q_i は等しいとする．したがって，

$$Q=f(S)$$

ただし，$f(s_i)=q_i$．一般性を失うことなしに，Q の固有値を，たとえば，$q_1=q_2=\alpha$ となるように番号をふったと仮定しよう．$|q_1\rangle$，$|q_2\rangle$ が張る空間において，ユニタリ変換によって別の正規直交基底を導入し，$|q_1'\rangle$，$|q_2'\rangle$ と名づける．ただし，それらは，$|q_1\rangle$ と $|q_2\rangle$ のトリビアルな1次結合でないとする．これらの新しい基底ベクトルもまた，固有値 $q_1'=q_2'=\alpha$ をもつ Q の固有ベクトルである．したがって，

$$\begin{aligned}Q&=q_1P_{|q_1\rangle}+q_2P_{|q_2\rangle}+\sum_{i=3}^{N} q_iP_{|q_i\rangle}\\&=\alpha(P_{|q_1\rangle}+P_{|q_2\rangle})+\sum_{i=3}^{N} q_iP_{|q_i\rangle}\\&=\alpha(P_{|q'_1\rangle}+P_{|q'_2\rangle})+\sum_{i=3}^{N} q_iP_{|q_i\rangle}\\&=g(R)\end{aligned}$$

ただし，

$$R=r_1P_{|q'_1\rangle}+r_2P_{|q'_2\rangle}+\sum_{i=3}^{N} r_iP_{|q_i\rangle} \tag{51}$$

とし，すべての r_i，$i=1\ldots N$ は異なるとする．したがって，R は極大であり，$g: S_R\to S_Q$ は

$$g(r_1)=\alpha$$

$$g(r_2)=\alpha$$
$$g(r_i)=q_i, \qquad i=3, \ldots, N$$

で定義される．R のスペクトル分解を，S のそれ

$$S=s_1P_{|q_1\rangle}+s_2P_{|q_2\rangle}+\sum_{i=3}^{N}s_iP_{|q_i\rangle} \tag{52}$$

と比較せよ．(51) と (52) から，R と S は可換でないことが分かる．なぜなら，$P_{|q_1\rangle}$，$P_{|q'_1\rangle}$ のような射影作用素の値域は，その構成によって，互いに平行でもなく直交してもいない射線であり，したがってこれらの射影作用素は可換でないからである．

（これを見るために，$P_{|q_1\rangle}P_{|q'_1\rangle}|q_1\rangle$ を考えよう．その結果は，$|q_1\rangle$ に平行なベクトルである．しかし，$P_{|q'_1\rangle}P_{|q_1\rangle}|q_1\rangle$ の結果は，$|q'_1\rangle$ に平行なベクトルである．したがって，2 つの射影作用素 $P_{|q'_1\rangle}$ と $P_{|q_1\rangle}$ の交換子は，恒等的にゼロではありえない.）

よって，定理は直接の構成によって証明された．

特別の例として，$N=3$ と仮定し，

$$S=s_1P_1+s_2P_2+s_3P_3$$
$$R=r_1P'_1+r_2P'_2+r_3P_3$$

を考えよう．ただし，P_1，P_2，P_3 は，極大オブザーバブル S の固有ベクトルの上に射影し，P'_1，P'_2，P_3 は，極大オブザーバブル R の固有ベクトルの上に射影する．よって，

$$P_3=\chi_{s_3}(S)$$
$$=\chi_{r_3}(R) \tag{53}$$

したがって，ここに，非極大オブザーバブル P_3 は，2 つの非可換な極大オブザーバブルの関数として，2 つの異なる仕方で表わされている．

S と R に結びつけられる射影作用素の間の関係を，図 1 で示そう．ここに，射影作用素は，その値域である射線と同一視されている．

3 つの射線 P'_1，P'_2，P_3 は，P_1，P_2，P_3 を，固定した P_3 のまわりに「回転する」ことによって得られる．明らかに，P_3 は，P_3 のまわりの無限個の可能な回転に依存する無限個の 3 つ組 P'_1，P'_2，P_3 の要素と考えることができる．そのような 3 つ組の各々は，次の条件を満足するように極大オブザーバブルを定

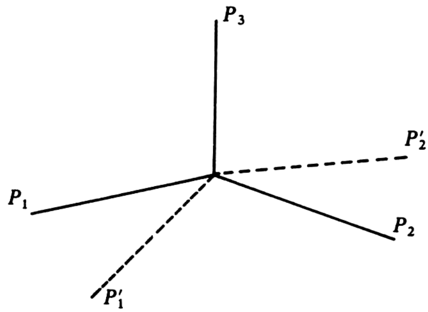


図 1　P_1, P_2, P_3 は3つ組直交射線である．3つ組 P_1', P_2', P_3 は，固定射線 P_3 のまわりの回転によって，3つ組 P_1, P_2, P_3 から得られる．

義する（この定義も一意ではない）．つまり，P_3 はそのオブザーバブルそれぞれの関数となり，しかもこれらの極大オブザーバブルは互いに可換でない．

1.4　論理－代数的接近法

1.2節において量子力学に対するフォン・ノイマンの接近法を展開した際に，われわれは，射影作用素がそこで決定的な役割を演じているのを見た．それらは，スペクトル分解（29）によってオブザーバブルを示す役割を果たすと同時に，（35）のように，状態を示す役割をも果たしている．統計アルゴリズムのより一般的な形（36）は，多次元の値域をもつより一般的な射影作用素 $P_Q(\Delta)$ を含んでいた．これは，次のことを示唆する．ヒルベルト空間に作用する射影作用素すべての集合が本質的にもっている代数構造を抽象することによって，量子力学の形式をより抽象的に特徴づける試みが可能であろう．射影作用素の値域は部分空間になるから，部分空間と射影作用素との間に1対1対応をつけて，ヒルベルト空間におけるすべての部分空間の集合の代数構造を問題にすることも，同様に可能である．〔一般には，無限次元ヒルベルト空間を考えるから，正確には，「閉部分空間」といわなければならないが，本書では，もっぱら話を有限次元に限るとしてあるから，部分空間は自動的に閉部分空間となる．しかし，後に，無限次元の話がでてきたときには，注意が必要である．〕さて，この集合は，集合論の包含関係によって，半順序づけられている．より正確に言うと，それは束（数学的付録を見よ）であって，2つの部分空間の最小上界

はそれらの**線形スパン**〔線形包〕(部分空間 A, B の線形スパンは $A \oplus B$ で表わされる)——すなわち，2つの部分空間におけるベクトルの1次結合すべてを含み，それらのみを含む部分空間——である，また，最大下界は2つの部分空間の集合論的共通部分（$\cap$ で表わす）である．さらに，各々の部分空間に対して，その部分空間のすべてのベクトルと直交するベクトルすべてからなる部分空間を，もとの部分空間の直補元と定義すると，この束は直可補束となる．A の直補元を表わすのに，$A^{\perp}$ という記法を用いる．射影作用素の言葉にもどって，この代数的束構造をヒルベルト空間の射影束と言うことにしよう．

この射影束についてまず注目すべきことは，それが分配的でないから，ブール束にならないということである．それを見るために，3つの単位ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ を考えよう．ただし，$|c\rangle$ は $|a\rangle$ と $|b\rangle$ とのトリビアルでない1次結合とする．$|a\rangle$ が生成する射線を値域とする射影作用素を $P_{|a\rangle}$ で表わそう．$P_{|b\rangle}$ と $P_{|c\rangle}$ についても同様とする．射影作用素をその値域である部分空間と同一視して，

$$P_{|c\rangle} \subset P_{|a\rangle} \oplus P_{|b\rangle}.$$

よって

$$P_{|c\rangle} \cap (P_{|a\rangle} \oplus P_{|b\rangle}) \neq (P_{|c\rangle} \cap P_{|a\rangle}) \oplus (P_{|c\rangle} \cap P_{|b\rangle}) \qquad (54)$$

(54) の左辺は $P_{|c\rangle}$ となるが，右辺は $0 \oplus 0 = 0$ である．ただし，0 はゼロ空間〔ゼロベクトルのみを含む部分空間〕を表わす．

しかし，射影束はブール束ではないけれども，多くのブール部分束を含んでいる．以下において，われわれは，補元（直補元）が全体の射影束の補元と一致するような部分ブール束に注目することにしよう．

まず，2次元ヒルベルト空間 $\mathbb{H}_2$ をとりあげよう．直交する単位ベクトル $|a\rangle$, $|a'\rangle$ の任意の対を考えよう．これらのベクトルは空間全体を張る．また，$|a\rangle$ と $|a'\rangle$ を固有ベクトルとするあるオブザーバブルを考え，a と a' をそれぞれその固有値としよう．さらに，4つの射影作用素 0, $P_{|a\rangle}$, $P_{|a'\rangle}$, I を考えよう．0 と I は，それぞれ，ゼロ空間と全体空間の上への射影作用素である．これらの射影作用素と結びつけられる部分束を，**ハッセの図**として数学者に知られている方法で表わすことができる．半順序関係における要素は小さな円で表わされ，ある要素が他の要素「よりも小である」という関係は，これらの要

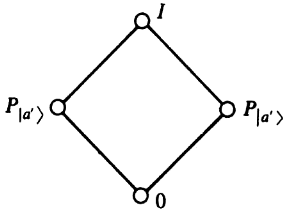


図 2　要素 0, $P_{|a\rangle}$, $P_{|a'\rangle}$, I からなる部分束のハッセの図.

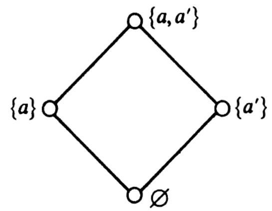


図 3　2 要素集合 $\{a, a'\}$ のブール・ベキ集合束のハッセの図.

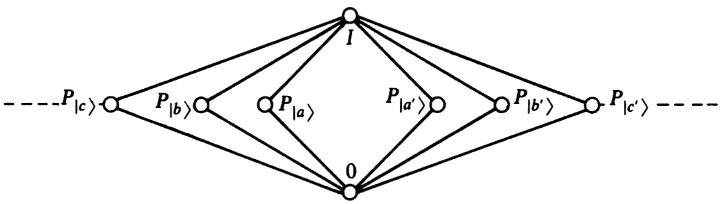


図 4　2 次元ヒルベルト空間の射影束．射影作用素の直交対 $P_{|a\rangle}$ と $P_{|a'\rangle}$, $P_{|b\rangle}$ と $P_{|b'\rangle}$, $P_{|c\rangle}$ と $P_{|c'\rangle}$ に対応する要素が描いてある.

素を線で結び,「小なる」要素が線の下端にくるようにして表現される.

要素 0, $P_{|a\rangle}$, $P_{|a'\rangle}$, I をもつ部分束に対するハッセの図は, 図 2 で示される. これは, 2 要素集合 $\{a, a'\}$ のベキ集合に対するお馴染みのブール束と同形である. ベキ集合束のハッセの図は, 図 3 に示されている.

しかしもちろん, $P_{|a\rangle}$ と $P_{|a'\rangle}$ で示されるもの以外にも, 多くの 1 次元部分空間がある. 他の直交対 $P_{|b\rangle}$, $P_{|b'\rangle}$; $P_{|c\rangle}$, $P_{|c'\rangle}$ 等, を考えることもできる. $\mathbb{H}_2$ に対する射影束は, 図 4 のようになるだろう. そこでは, 要素 $P_{|a\rangle}$, $P_{|a'\rangle}$, $P_{|b\rangle}$, $P_{|b'\rangle}$, $P_{|c\rangle}$, $P_{|c'\rangle}$ のみを示しておいた.

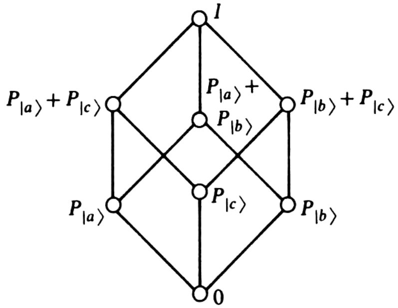


図 5 3次元ヒルベルト空間の部分ブール束. $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ は, 3つの直交単位ベクトルである.

すでに見たように, 全体の束は非ブール的である. しかし, この束は, 無限個のブール部分束が組み合わさったものと見なすことができる. しかしながら, これらのブール部分束の組み合わされ方は, トリビアルである——すなわち, すべて0とIのみを共有しているだけである. 3次元, あるいは, より多次元のヒルベルト空間を取り上げると, ブール部分束が組み合わされる仕方は, きわめて複雑になる.

3次元ヒルベルト空間の典型的なブール部分空間を考えよう. 3つの直交する単位ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ をとり, 対応する射影作用素を$P_{|a\rangle}$, $P_{|b\rangle}$, $P_{|c\rangle}$とする. そして, 8つの射影作用素 : 0, $P_{|a\rangle}$, $P_{|b\rangle}$, $P_{|c\rangle}$, $P_{|a\rangle}+P_{|b\rangle}$, $P_{|a\rangle}+P_{|c\rangle}$, $P_{|b\rangle}+P_{|c\rangle}$, $P_{|a\rangle}+P_{|b\rangle}+P_{|c\rangle}=I$を考えよう. ハッセの図は, 図5のようになる. 再び, a, b, cを, 固有ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ をもつオブザーバブルの固有値と見なそう. 上の束は, 固有値の集合 $\{a, b, c\}$ のベキ集合ブール束と同形になる. これは, 図6で表わされている. 次のことに注目しておこう. 図5に示されたブール部分束は, これを部分束として含む他のブール部分束が存在しないという意味で, 極大である.

正規直交ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ の3つ組をあらゆる可能な方向へ「回転する」と, 無限個のそのようなブール部分束が生成される. しかし, それらは, もはや単に0とIを共有するという形で重なっているのではない. たとえば, 3つ組 $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ を$|c\rangle$ の方向のまわりに「回転して」得られる直交ベクトルを考えよう. この新しい3つ組ベクトルが生成するすべての束は, 射影作

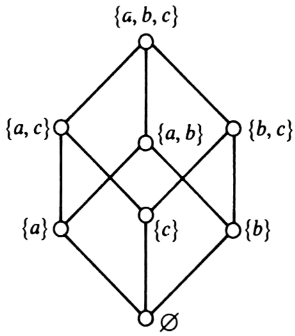


図 6 3要素集合 $\{a, b, c\}$ のブール・ベキ集合束のハッセの図.

用素 $P_{|c\rangle}$ を共有する．したがって，このようなブール部分束は，きわめて複雑な仕方で組み合わさることになる．明らかに，このようなことは，3よりも大きい任意の次元に対しても生じる．スピン$\frac{1}{2}$粒子のスピンに対する量子力学を記述するのは2次元ヒルベルト空間であるが，このヒルベルト空間はまったく特別であって，量子力学統計に対する隠れた変数による再構成が可能であることを，われわれは後に見るであろう．これは，結局のところ，対応する射影束の特に単純な性質に関係している．

量子力学の形式にとって本質的な数学的構造が，対応するヒルベルト空間の射影束であることを見てきた．これは，射影束を，その源たるヒルベルト空間から独立に，公理的に特徴づける試みを示唆する．そのような公理化は，量子力学に対する論理－代数的接近法として知られている．それがなぜ「代数的」と言われるかの理由は明らかである．論理との関係は，第7章でより詳しく展開することにしよう．簡単に言うと，ブール束と古典命題論理とのよく知られた関係が引き合いに出される，ということである．量子力学において中心的に考察されるより一般的な非ブール束は，新しい一般化された論理――普通，量子論理と呼ばれる――に同じように関係している，という考えである．

しかし，論理－代数的公理化の1つの目標は，ヒルベルト空間による標準的な方法と同値でないさまざまな形式を可能にすることにある．たとえば，複素数体上のヒルベルト空間の射影束でない束を――あるいは，より一般的な順序集合をも――特徴づけることである．この方向は，Jauch（1968）で論じられ

ている．われわれは，量子力学を変形したり一般化する試みには，本書では関わらない．論理－代数的方法を，標準的なフォン・ノイマン流のヒルベルト空間形式に対する別の観点からの１つの見方として扱う．

一言注意しておこう．量子力学に対する論理－代数的接近法を，それとはまったく異なるある代数的接近法と混同してはならない．後者は，ヒルベルト空間上の線形作用素の代数——数学者が**バナッハ代数**と呼ぶもの——から抽象されたものである．バナッハ代数は，位相的側面と代数的側面をもっており，この意味では，射影束よりも豊富な構造である．射影束は純粋に代数的である．再び，代数的接近法は公理的に展開することができ，その源である標準的なヒルベルト空間論を変形し，あるいは一般化するのに用いることができる．本書においては，量子力学に対するこの代数的接近法にふれることはないであろう．また，S－行列理論，ファインマンの経路積分による方法，あるいは第２量子化といったような，物理学の文献で述べられている他のいくつかの標準的な方法にもふれることはないであろう．

1.5　グリーソンの定理

ヒルベルト空間の射影束の上で定義された**確率測度**の意味を説明しよう．これは，射影作用素を閉区間［0, 1］の実数に写す写像μであって，各々の極大ブール部分束の上では，通常の確率測度の要請を満足する．これは，ちょうど，

$$\mu\left(\sum_i P_i\right)=\sum_i \mu(P_i) \tag{55}$$

と

$$\mu(0)=0, \qquad \mu(I)=1 \tag{56}$$

を要請することになる．ただし，$\{P_i\}$ は，互いに直交する射影作用素の任意の可算集合である．有限次元ヒルベルト空間の場合は，互いに直交する射影作用素の数はもちろん有限である（実際，ヒルベルト空間の次元を超えることはない）．したがって，この場合には，一般的な要請（55）で表わされる可算加法性はつねに有限加法性となる．

特に，写像μが，作用素Qの，式（29）のようなスペクトル分解に現われる射影作用素に，数$\mu(P_{|q_i\rangle})$を与えるならば，

$$\sum_{i=1}^{N}\mu(P_{|q_i\rangle})=\mu\left(\sum_{i=1}^{N}P_{|q_i\rangle}\right)=\mu(I)=1 \tag{57}$$

が要請される．

いまや，次の問いが生じてくる．ヒルベルト空間の射影束の上で定義されうる可能な確率測度は何か？　われわれは，すでに，そのような測度のクラスを手にしている．たとえば，Wを式（35）で示された統計作用素として，

$$\mu(P_i)=\mathrm{Tr}(P_i\cdot W) \tag{58}$$

は，たしかに，上で課した条件を満足している．$\mathrm{Tr}(P_{|\psi_k\rangle})=1$であるから，

$$\mathrm{Tr}(W)=\sum_k w_k\mathrm{Tr}(P_{|\psi_k\rangle})=\sum_k w_k=1 \tag{59}$$

となることを覚えておこう．

1957年グリーソンは，上の結果のきわめて注目すべき逆命題を証明した．ヒルベルト空間の次元が2よりも大ならば，射影束の上のすべての確率測度は，(58）の形をとる．再び，2次元の場合といういくぶん異常な状況が，グリーソンの定理において明らかになっている．グリーソンの定理は，第5章で論じるコッヘン－シュペッカーのパラドクスに対する鍵を提供するけれども，われわれはこの定理の証明は与えない．というのは，グリーソンの定理には，そこで重要になる関連した系があり，それを，われわれは直接証明することになるからである．

しかし，(58）が示す測度の意義については，いくつかのコメントをつけておこう．より具体的にするために，3次元実ヒルベルト空間を考えよう．これは，お馴染みのユークリッド的3次元ベクトル空間に他ならない．1次元の値域をもつ射影作用素は，ちょうど，原点を通りあらゆる可能な方向に向かう直線に対応する．各直線は，単位球と2つの対心点で交わる．そうすると，測度μは，単位球の表面から［0, 1］への測度μ'を誘導すると考えられる．ただし，対心点はつねに同じ値を与えるものとする．μ'に関して注目すべきことは，単位球上で連続になることである．くだいた言い方をすると，球面上の位置の十分小さな変化は対応する確率値の小さな変化しか生じない，ということである．グリーソンの定理にもとづくと，いくつかの確率測度は――それらが不連続であるというだけで――除外される．

ユークリッド的3次元ベクトル空間の単位球に対して，次のような写像を試みることを想像しよう．互いに直交する3方向のすべての組それぞれに対して，1つの方向には値1を与え，他の2つの方向には値0を与えることにしよう．このとき，各3つ組において，それらの値の和は確かに1である．しかし，（前節で論じたように）可能な方向の3つ組すべてが重なり合う複雑な仕方のゆえに，このような構成は，端的に不可能なのである．このことを見るには，そのような写像が不連続になることに注目すればよい．グリーソンの定理は，3次元の場合に不連続な測度が不可能であることを証明している．

われわれが導入した写像は，なぜ不連続なのか？　厳密でない議論ならば，次のように進めばよい．

$\mu'(p)=1$，$\mu'(q)=0$ なる単位球面上の2点 p，q を考えよう．pq を大円の短いほうの弧で結ぶ．p と q の間の任意の点 r をとる．そうすると，$\mu'(r)$ は0か1である．それが1ならば，弧 rq を考え，0ならば，弧 pr を考える．どちらの場合でも，弧の端点の値は0と1であり，これら2点間の（測地的）距離は小さくなる．この操作は無限に続けることができ，実際に，確率値0，1をもつ点の間の最小距離というものは存在**しない**．したがって，確率値の分布は，無限小の距離において有限量すなわち1だけジャンプする．よって，この写像は不連続になる．

この結果はかなり重要なので，より厳密な証明も与えておこう．証明は，この結果が計量的なものではなくて位相的なものであることを示す．単位球の表面は，連結多様体である．ここで「多様体」とは，ユークリッド平面に局所同相であることを意味する．連結多様体は，互いに素な開集合の和として表わすことができない．多様体上の開集合とは，通常の「ε 近傍」による位相をもつユークリッド平面で定義された開集合の，上に述べた同相写像のもとでの像に他ならない．

さて，われわれが考察している例に対する特殊な写像 μ' を考えよう．値域は2要素集合 $\{0, 1\}$ である．この写像が連続であると仮定しよう．この写像の値域における開集合 $\{0\}$ と $\{1\}$〔R の通常の位相から $\{0, 1\}$ に誘導される相対位相において，$\{0\}$，$\{1\}$ は開かつ閉集合となる〕の逆像を考えよう．これらは，球面上の開集合となる．（連続性の位相的定義——終集合の任意の

開集合の，連続写像による逆像は，定義域の開集合である——を思いだそう.)しかし，これらは，

$$\mu'^{-1}(\{1\})=\mathscr{C}\,\mu'^{-1}(\{0\})$$

をも満足する．$\mathscr{C}$ は，補集合を与える演算子である．上の式は，球面上の**すべての**点が 1 か 0 に写像されることから，導かれる．

したがって，球面全体を S で表わすと，

$$\begin{aligned}S&=\mu'^{-1}(\{0\})\cup\mathscr{C}\mu'^{-1}(\{0\}) \quad (\text{補集合の定義より})\\&=\mu'^{-1}(\{0\})\cup\mu'^{-1}(\{1\})\end{aligned}$$

これは，球面を，2 つの互いに素な開集合の和として，表わしており，球面が連結であるという位相的性質に矛盾する．したがって，背理法により，この写像が連続ではありえないことが証明された．

測度論の知識をいくらか持っている人に注意を与えて，この節を終えることにしよう．グリーソンの定理は，実際には，**ラドン－ニコディム**の定理の一般化であり，標準測度トレースからグリーソン測度を生成している．トレースは，各射影作用素にその値域の次元を与える測度である．これは，（有限次元ヒルベルト空間の場合）ヒルベルト空間の次元 N で割ることによって，規格化される．この標準測度は，W を「定数」$(1/N)\times I$ として，(58) から得られる．ただし，I は恒等写像である．「定数」で**ない** W について，グリーソンの結果が与えるより一般的な場合には，W は，標準測度に関するグリーソン測度の，一種のラドン－ニコディム導関数の役割を果たす．ここに，積分は対角和（トレース算）で置き換えられている〔訳者による補足 1 参照〕.

1.6 多粒子系の量子力学

量子力学において多粒子系の状態を記述する数学的道具立ては，テンソル積（詳細は，数学的付録，192 頁以下を見よ）の概念によって提供される．2 粒子の場合を考えて，それぞれの状態はヒルベルト空間 $\mathbb{H}_1$ と $\mathbb{H}_2$ における単位ベクトルで表わされるとしよう．これらの合成系の状態を表わすのに適したヒルベルト空間は，$\mathbb{H}_1$ と $\mathbb{H}_2$ のテンソル積であり，$\mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$ と書かれる．$\mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$ のベクトルは，$\mathbb{H}_1$ と $\mathbb{H}_2$ のベクトルのテンソル積の 1 次結合となることに，注意することは大切である．特殊な場合にのみ，ベクトルの 1 つのテンソル積として

書くことができる．ベクトル空間のテンソル積と，これらの空間に属するベクトルのテンソル積とを，混同しないように気をつけなければならない．

粒子1と結びついたオブザーバブル Q_1 を考えよう．粒子1の状態は，ヒルベルト空間 $\mathbb{H}_1$ のベクトルで記述されるとし，また，このオブザーバブルに対応する自己共役作用素も Q_1 と書くことにする．このとき，Q_1 は，粒子1と粒子2の合成系に関係したオブザーバブルと考えることもできる．合成系に対するオブザーバブルと見なしたときに Q_1 に対応する自己共役作用素は，$Q_1 \otimes I$ である．ただし，I は $\mathbb{H}_2$ 上の恒等作用素である．同様に，粒子2に関係するオブザーバブル R_2 は，テンソル積空間上で $I \otimes R_2$ によって表わされる．ただし，I は，今度は，$\mathbb{H}_1$ 上の恒等作用素である．ここで，われわれは，テンソル積をもう1つ別の意味で用いている．つまり，線形作用素のテンソル積である．2つの作用素のテンソル積 $A \otimes B$ において，積の左側の作用素は $\mathbb{H}_1$ に関係し右側の作用素は $\mathbb{H}_2$ に関係する，と約束しよう．

$I \otimes R_2$ と $Q_1 \otimes I$ は可換であるから，Q_1 が値 q_i をとり，R_2 が値 r_j をとる結合確率を問題にすることができる．ここに，q_i は Q_1 の i 番目の固有値であり，r_j は R_2 の j 番目の固有値である．

（47）を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(q_i,\ r_j)^{W}_{Q_1, R_2} &= \mathrm{Tr}(\chi_{q_i}(Q_1 \otimes I) \cdot \chi_{r_j}(I \otimes R_2) \cdot W) \\ &= \mathrm{Tr}((\chi_{q_i}(Q_1) \otimes I) \cdot (\mathrm{I} \otimes \chi_{r_j}(Q_2)) \cdot W) \\ &= \mathrm{Tr}((\chi_{q_i}(Q_1) \otimes \chi_{r_j}(R_2)) \cdot W) \\ &= \mathrm{Tr}((P_{Q_1}(q_i) \otimes P_{R_2}(r_j)) \cdot W) \qquad (60)\end{aligned}$$

が与えられる．W は結合系の統計作用素である．

テンソル積のこの考えがディラックの記法を用いてどのように表わされるかを，簡単に考察しよう．$|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ のテンソル積は，

$$|\alpha\rangle|\beta\rangle \underset{Df}{=} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$$

と書かれる．ブラ $\langle\alpha|$ と $\langle\beta|$ のテンソル積も同じように定義される．よって，任意のケット $|\gamma\rangle$，$|\delta\rangle$ に対して，

$$(\langle\alpha| \otimes \langle\beta|)(|\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle) \underset{Df}{=} \langle\alpha|\gamma\rangle \cdot \langle\beta|\delta\rangle.$$

$\langle\alpha| \otimes \langle\beta|$ を $\langle\alpha|\langle\beta|$ と略記する．

いまや，

$$P_{|q_i\rangle}\otimes P_{|r_j\rangle}=|q_i\rangle|r_j\rangle\langle q_i|\langle r_j| \tag{61}$$

という書き方を理解することができる．

テンソル積の内積をつくるときの混同を避けるためには，関数的な記法 $\langle\alpha|\langle\beta|(|\gamma\rangle|\delta\rangle)$を用いるのが最善である．これは，上のように，$\langle\alpha|\gamma\rangle\cdot\langle\beta|\delta\rangle$ を意味すると定義する．とくに，$|\Psi\rangle$ がテンソル積空間のベクトルで，$W=P_{|\Psi\rangle}$ ならば，

$$\mathrm{Prob}(q_i,\ r_j)^W_{Q_1,R_2}=\sum_{s|q_s=q_i}\ \sum_{t|r_t=r_j}|\langle q_s|\langle r_t|(|\Psi\rangle)|^2 \tag{62}$$

ただし，和は縮退をも考慮してとる．ディラック自身は，$\langle q_s r_t|\underset{Df}{=}\langle q_s|\langle r_t|$ と書いている．ただし，この関係式の左辺における固有値 q_s，r_t の順序は重要であり，最初の数は粒子1に関係し，2番目は粒子2に関係する．この略記法によって，式（62）におけるマル括弧をはずして，単純に，

$$\mathrm{Prob}(q_i,\ r_j)^W_{Q_1,R_2}=\sum_{s|q_s=q_i}\ \sum_{t|r_t=r_j}|\langle q_s r_t|\Psi\rangle|^2$$

と書く．ディラックは，ブラに対する $\langle\alpha\beta|=\langle\alpha|\langle\beta|$ に対応させて，$\mathbb{H}_1$ の任意のケット $|\alpha\rangle$ と $\mathbb{H}_2$ の任意のケット $|\beta\rangle$ に対して，$|\alpha\beta\rangle\underset{Df}{=}|\alpha\rangle|\beta\rangle$ と書いている．したがって，$\langle\alpha|\langle\beta|(|\gamma\rangle|\delta\rangle)$ は $\langle\alpha\beta|\gamma\delta\rangle\underset{Df}{=}\langle\alpha|\gamma\rangle\cdot\langle\beta|\delta\rangle$ と書かれる．この略記法はしばしば便利であるが，テンソル積の内積を扱うときは，より明確な関数的記法のほうを概して薦める．

1.7　量子力学における角運動量

以下の章において，量子系のスピン角運動量を記述するのに必要な有限次元ヒルベルト空間を例として用いる．この節では，後にスピン$\frac{1}{2}$およびスピン1の系の性質を論じる際に用いる結果をすべて集めておこう．量子力学におけるスピンは，系の「内部」自由度と結びつけられるベクトル量$\mathbf{S}$である．スピンの，デカルト座標系に対するX，Y，Z成分に対応するオブザーバブルを，それぞれS_x，S_y，S_zで表わす．スピン・ベクトルの大きさは，Sで表わす．

そうすると，基本的関係

$$S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2 \tag{63}$$

が成立する．オブザーバブルS_x，S_y，S_z（より正確には，それらに対応する自己共役作用素）は，「軌道」角運動量（すなわち，通常$\mathbf{r}\times\mathbf{p}$と定義される角運

動量）の場合と同様の交換関係に従うと仮定しよう．よって，1.1 節ですでに与えた交換関係（式（13）を見よ）

$$\left.\begin{aligned} S_xS_y - S_yS_x &= iS_z \\ S_yS_z - S_zS_y &= iS_x \\ S_zS_x - S_xS_z &= iS_y \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

を得る．ただし，プランク定数を 2π で割った $\hbar$ が 1 に等しくなるように，単位を選んでいる．

S^2，S_x，S_y，S_z の固有値を決定する問題は標準的なもので，量子力学のほとんどすべての教科書で扱われている．われわれは，単に結果だけを述べよう．

S^2 の固有値は，s を負でない整数または半整数として，$s(s+1)$ となる．与えられた s の値に対して，S^2 は $(2s+1)$ 重の縮退をもつが，これは，ベクトル $\mathbf{S}$ の任意の 1 つの成分の固有値を指定することによって，除くことができる．これらの成分に対する固有値は，$-s$，$-s+1$，...，$s-1$，s であり，単に m で表わす．すなわち，m は，$-s$ から $+s$ までの区間で，整数間隔に置かれた $2s+1$ 個の値の 1 つをとる．

固定した s に対して，固有値 m に属す S_z の固有ベクトルを，$|S_z=m\rangle$ で示す．同様に，固有値 m に対応する S_x，S_y の固有ベクトルを示すのに，$|S_x=m\rangle$，$|S_y=m\rangle$ の記法を用いる．

量子力学における角運動量の議論は，「上昇」作用素 S_+ および「下降」作用素 S_- を導入すると，きわめて便利になる．これは，

$$\left.\begin{aligned} S_+ &= S_x + iS_y \\ S_- &= S_x - iS_y \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

と定義され，したがって，

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \\ S_y &= \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

と書くことができる．「上昇」作用素，「下降」作用素という名前は，$S_\pm$ を $|S_z=m\rangle$ に作用させたときの効果を示す次のような結果からきている．S_+ は，適当な因子のもとで，ケット $|S_z=m+1\rangle$ を生じる．したがって，S_z の固有値を m から $m+1$ に上げるから，上昇作用素と呼ばれるのである．同様に，

S_- は，ある係数がかかるが，ケット $|S_z=m-1\rangle$ を生じる．よって，S_- は，S_z の固有値を m から $m-1$ に下げるから，下降作用素なのである．

より具体的に述べると，

$$S_\pm|S_z=m\rangle=C_\pm(s,\ m)|S_z=m\pm1\rangle \tag{67}$$

ただし，

$$C_\pm(s,\ m)=\sqrt{s(s+1)-m(m\pm1)} \tag{68}$$

$m=s$ のとき

$$C_+(s,\ s)=0 \tag{69}$$

$m=-s$ のとき

$$C_-(s,\ -s)=0 \tag{70}$$

となることに注意しよう．これは，S_+ を $|S_z=m\rangle$ に繰り返し作用させても，S_z の固有値が $+s$ より大きくはなりえないことを意味する．同様に，S_- が繰り返し $|S_z=m\rangle$ に作用しても，S_z の固有値は $-s$ より小さくはなりえない．

特に関心があるのは，$s=\dfrac{1}{2}$ と $s=1$ なる 2 つの特殊な場合である．

$s=\dfrac{1}{2}$

m の可能な値は，$\pm\dfrac{1}{2}$ となる．

この場合，新しい作用素

$$\boldsymbol{\sigma}=2\times\mathbf{S} \tag{71}$$

を定義するのが便利である．よって，σ_x，σ_y，σ_z の固有値は ±1 となる．

表記法

$$\left.\begin{aligned}|\alpha\rangle&=|\sigma_z=+1\rangle\\|\beta\rangle&=|\sigma_z=-1\rangle\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

を導入しよう．したがって，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z|\alpha\rangle&=|\alpha\rangle\\\sigma_z|\beta\rangle&=-|\beta\rangle\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$C_+\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)=C_-\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=1$ であるから，(66)，(67)，(71) からただちに

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x|\alpha\rangle=|\beta\rangle \\ \sigma_x|\beta\rangle=|\alpha\rangle\end{array}\right\} \tag{74}$$

と

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_y|\alpha\rangle=i|\beta\rangle \\ \sigma_y|\beta\rangle=-i|\alpha\rangle\end{array}\right\} \tag{75}$$

が導かれる．σ_x，σ_y，σ_z は，パウリのスピン作用素として知られている．基底ベクトル $|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$ によって与えられる表現において，お馴染みの行列

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \tag{76}$$

が得られる．

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=I \tag{77}$$

に注意しよう．

さて，単位ベクトル $\mathbf{n}$ によって示される方向（Z 軸と異なってよい）におけるスピン成分 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ の固有値と固有ベクトルを見出す問題を考察しよう．

議論を簡単にするために，$\mathbf{n}$ は XZ 平面にあり Z 軸と角度 θ をなすように座標軸 X，Y，Z を選ぼう．このとき，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\sigma_z\cos\theta+\sigma_x\sin\theta$．(76) から，$|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ の基底における $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ の行列表現は，

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{78}$$

固有値問題

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \tag{79}$$

を考えよう．われわれは，固有値 λ の可能な値と，固有ベクトルを $|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$ で展開したときの対応する係数 u と v を見出したいのである．

u，v を決める方程式は，

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\cdot u+\sin\theta\cdot v=\lambda u\\ \sin\theta\cdot u-\cos\theta\cdot v=\lambda v\end{array}\right\}\qquad(80)$$

これらの方程式が矛盾しないために，

$$(\lambda-\cos\theta)(\lambda+\cos\theta)=\sin^2\theta$$
$$\lambda^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

よって

$$\lambda=\pm 1\qquad(81)$$

$\lambda=+1$ に対して，(80) から

$$u/v=\cos(\theta/2)/\sin(\theta/2)$$

$\lambda=-1$ に対して，

$$u/v=-\sin(\theta/2)/\cos(\theta/2)$$

したがって，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ の規格化された固有ベクトルに対して

$$\left.\begin{array}{l}|\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=+1\rangle=\sin(\theta/2)|\beta\rangle+\cos(\theta/2)|\alpha\rangle\\ |\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=-1\rangle=\cos(\theta/2)|\beta\rangle-\sin(\theta/2)|\alpha\rangle\end{array}\right\}\qquad(82)$$

を得る．特別の場合として，X 軸方向にある $\mathbf{n}$ をとり，$|\sigma_x=+1\rangle$ を $|\gamma\rangle$ で，$|\sigma_x=-1\rangle$ を $|\delta\rangle$ で表わすと，簡単な関係式

$$\left.\begin{array}{l}|\gamma\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle+|\alpha\rangle)\\[2ex] |\delta\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle-|\alpha\rangle)\end{array}\right\}\qquad(83)$$

が得られ，これらは $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ について解くことができて，

$$\left.\begin{array}{l}|\alpha\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma\rangle-|\delta\rangle)\\[2ex] |\beta\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma\rangle-|\delta\rangle)\end{array}\right\}\qquad(84)$$

が得られる．ついでに，スピン作用素と回転との関係に注意しておこう．単位ベクトル $\mathbf{n}$ のまわりに時計方向に角度 θ だけ座標系を回転させることは，ユニタリ作用素 $e^{-i(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\theta}$ によって引き起こされる．さて，$\sigma_z\cos\theta+\sigma_x\sin\theta$ は，Y 軸の正方向のまわりに角度 θ だけ Z 軸を回転することによって σ_z から得られる．対応する回転作用素は，

$$R(\theta)=e^{-i\cdot\sigma_y\cdot\frac{1}{2}\theta} \tag{85}$$

θのベキで展開し，$\sigma_y^2=I$を思い出すと，

$$R(\theta)=\cos(\theta/2)\cdot I-i\sin(\theta/2)\cdot\sigma_y \tag{86}$$

(82) で与えられた固有ベクトルが，単に，$R(\theta)|\alpha\rangle$ と $R(\theta)|\beta\rangle$ になることは，用意に確かめることができる．

$\underline{s=1}$

この場合，mの可能な値は-1，0，$+1$である．

式 (66)，(67)，(68) を用いると，S_x，S_y，S_zがケット$|S_z=-1\rangle$，$|S_z=0\rangle$，$|S_z=+1\rangle$ に作用した結果を容易に構成することができる．こうして，ケット$|S_z=-1\rangle$，$|S_z=0\rangle$，$|S_z=+1\rangle$ の基底による作用素S_x，S_y，S_zの行列表現が次のように得られる．

$$\left.\begin{aligned} S_x&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_y&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ S_z&=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

$s=1$というこの特別な場合に行列S_x^2，S_y^2，S_z^2がすべて可換になることは，「腕力」にまかせて計算すれば容易に確かめることができる．

この重要な結果を証明するよりエレガントな方法は，恒等式

$$[S_x^2,\ S_y^2]=(S_z-1)S_+^2-(S_z+1)S_-^2 \tag{88}$$

に注目することである．(88) の右辺は，ケット$|S_z=-1\rangle$，$|S_z=0\rangle$，$|S_z=+1\rangle$ が張る空間におけるどの状態ベクトルに作用しても，明らかに，ゼロとなる．

X，Y軸は任意の直交する方向に選ぶことができるのであるから，同様に

$$[S_x^2,\ S_z^2]=[S_y^2,\ S_z^2]=0$$

が成立すると結論できる.

ケット $|S_x=0\rangle$, $|S_y=0\rangle$, $|S_z=0\rangle$ は S_x^2, S_y^2, S_z^2 を同時に対角化する正規直交基底をなすことを示そう. 式 (66), (67), (68) を用いて, 次の結果を容易に確かめることができる.

$$\left.\begin{aligned} |S_x=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|S_z=-1\rangle-|S_z=+1\rangle) \\ |S_y=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|S_z=-1\rangle+|S_z=+1\rangle) \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

明らかに, これら2つのケットは互いに直交し, また $|S_z=0\rangle$ とも直交している.

いまや, 次の結果が, 簡単に得られる.

$$\left.\begin{aligned} &S_x^2\cdot\begin{cases} |S_x=0\rangle=0 \\ |S_y=0\rangle=|S_y=0\rangle \\ |S_z=0\rangle=|S_z=0\rangle \end{cases} \\ &S_y^2\cdot\begin{cases} |S_x=0\rangle=|S_x=0\rangle \\ |S_y=0\rangle=0 \\ |S_z=0\rangle=|S_z=0\rangle \end{cases} \\ &S_z^2\cdot\begin{cases} |S_x=0\rangle=|S_x=0\rangle \\ |S_y=0\rangle=|S_y=0\rangle \\ |S_z=0\rangle=0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

したがって, 基底 $\{|S_x=0\rangle, |S_y=0\rangle, |S_z=0\rangle\}$ において, S_x^2, S_y^2, S_z^2 の次のような対角表現が得られる.

$$\left.\begin{aligned} S_x^2 &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ S_y^2 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ S_z^2 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

検算として，スピン 1 の系に対する期待通りに

$$S_x^2+S_y^2+S_z^2=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

が成立することはすぐ分かる．

いま，オブザーバブル

$$H_s=aS_x^2+bS_y^2+cS_z^2 \tag{92}$$

を考えよう．a，b，c は互いに異なる 3 つの実数である．基底 $\{|S_x=0\rangle, |S_y=0\rangle, |S_z=0\rangle\}$ において，H_s は対角行列

$$\begin{pmatrix}b+c & & \\ & a+c & \\ & & a+b\end{pmatrix} \tag{93}$$

で表現される．よって，H_s の固有値は $b+c$，$a+c$，$a+b$ であり，a，b，c が異なればこれらも異なる．よって，H_s は極大作用素であるが，S_x^2，S_y^2，S_z^2 は極大でなく明らかに縮退している．

H_s の固有ケットを $|b+c\rangle$，$|a+c\rangle$，$|a+b\rangle$ と略記すると，単純な結果

$$\left.\begin{aligned}|b+c\rangle&=|S_x=0\rangle\\|a+c\rangle&=|S_y=0\rangle\\|a+b\rangle&=|S_z=0\rangle\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

を得る．(89) と (94) を用いると，基底 $\{|S_z=-1\rangle, |S_z=0\rangle, |S_z=+1\rangle\}$ を，基底 $\{|b+c\rangle, |a+c\rangle, |a+b\rangle\}$ によって次のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}|S_z=-1\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|a+c\rangle+|b+c\rangle)\\|S_z=0\rangle&=|a+b\rangle\\|S_z=+1\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|a+c\rangle-|b+c\rangle)\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

純粋に形式的な仕方で導入されたスピン・ハミルトニアン H_s の性質は，後の第 5 章と第 6 章でコッヘン－シュペッカーのパラドクスを論じるときに，大いに用いられる．いまのところは，S_x^2，S_y^2，S_z^2 すべてが次の仕方で H_s の関数として表わされうることを注意するのみにしよう．

$$S_x^2=(a-b)^{-1}(c-a)^{-1}\,[H_s-(b+c)]\,[H_s-2a] \tag{96}$$

$$S_y^2=(b-c)^{-1}(a-b)^{-1}[H_s-(c+a)][H_s-2b] \tag{97}$$

$$S_z^2=(c-a)^{-1}(b-c)^{-1}[H_s-(a+b)][H_s-2c] \tag{98}$$

実際，S_x^2，S_y^2，S_z^2 は，それぞれ，対 $\{|a+c\rangle, |a+b\rangle\}$，$\{|b+c\rangle, |a+b\rangle\}$，$\{|b+c\rangle, |a+c\rangle\}$ によって張られる 2 次元部分空間を値域とする射影作用素である．

われわれは，

$$\left.\begin{aligned} P_x&=I-S_x^2\\ P_y&=I-S_y^2\\ P_z&=I-S_z^2 \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

によって定義される射影作用素を導入することができる．これらの値域は，それぞれ，$|b+c\rangle$，$|a+c\rangle$，$|a+b\rangle$ と結びついた射線である．

また

$$H_s=(b+c)P_x+(a+c)P_y+(a+b)P_z \tag{100}$$

にも注意しよう．これは，H_s のスペクトル分解に他ならない．そしてもちろん，通常のように，

$$P_x+P_y+P_z=3\cdot I-(S_x^2+S_y^2+S_z^2)=3\cdot I-2\cdot I=I$$

1.8　合成系の角運動量

2 粒子系に対して，合成系の状態を記述するにはテンソル積空間を採用しなければならないことを 1.6 節で見た．ここでは，2 粒子の全スピン角運動量 **S** の固有値と固有ケットを見出して，それらを個々の成分粒子のスピン角運動量 $\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_2$ の固有値と固有ケットを用いて表わす，という問題を考察しよう．この問題の解に対する一般的結果はよく知られている．s_1 と s_2 が 2 つの粒子に対するスピン量子数ならば，結合系に対するスピン量子数 s は，$|s_1-s_2|$ から s_1+s_2 まで間隔 1 で分布する．与えられた s に対して，全スピンの Z 成分 S_z の固有値は，通常の仕方で，$-s$ から $+s$ まで間隔 1 で分布する．与えられた可能な s に対して $|S_z=m\rangle$ を $|S_{1z}=m'\rangle$ と $|S_{2z}=m''\rangle$ で表わす問題は，m' が $-s_1$ から $+s_1$ まではしり，m'' が $-s_2$ から $+s_2$ まではしるとして，

$$|S_z=m\rangle=\sum_{m'=-s_1}^{s_1}\sum_{m''=-s_2}^{s_2}c(m', m''; m, s, s_1, s_2)|S_{1z}=m'\rangle|S_{2z}=m''\rangle \tag{101}$$

で定義される，いわゆるクレブシュ－ゴルダン係数によって解かれる．係数 $c(m', m''; m, s, s_1, s_2)$ は，一般には，引数の複雑な関数であるが，s_1 と s_2 の小さな値に対する結果は量子力学の大抵の教科書に表として載っているので便利である．われわれの目的のためには，議論を2つの特殊な場合に限定しよう．

2つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の1重項状態

ここで $s=0$ で，m はただ1つの値0をとる．その結果としての状態ベクトルは

$$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha(1)\rangle|\beta(2)\rangle-|\beta(1)\rangle|\alpha(2)\rangle) \tag{102}$$

この式において，スピン状態ベクトルの引数は2つの粒子を区別するために用いられている．よって，$|\alpha(1)\rangle$ は固有ケット $|\sigma_{1z}=+1\rangle$ であり，$|\beta(1)\rangle$ は固有ケット $|\sigma_{1z}=-1\rangle$ である．同様に，$|\alpha(2)\rangle=|\sigma_{2z}=+1\rangle$，$|\beta(2)\rangle=|\sigma_{2z}=-1\rangle$.

全スピンの1重項状態は，回転に対して不変という性質をもっている．これが意味するのは，任意の与えられた回転に対して，個々の粒子に関係する回転作用素のテンソル積を $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に作用させても，結果は，可能な位相因子の範囲内で $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ が再び得られる，ということである．たとえば，1.7節で論じたY軸の正方向のまわりの90°の回転（$\theta=\pi/2$ とおいた式（85）参照）を考えよう．これは，$|\alpha\rangle$ を $|\gamma\rangle$ に，$|\beta\rangle$ を $|\delta\rangle$ に変える．よって，$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma(1)\rangle|\delta(2)\rangle-|\delta(1)\rangle|\gamma(2)\rangle)$$

に変わる．しかし，式（83）から代入によって，これは，再び $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に等しいことが分かる．――すなわち，$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ は，（102）の形で書くことができるし，また同じく，別の形

$$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma(1)\rangle|\delta(2)\rangle-|\delta(1)\rangle|\gamma(2)\rangle) \tag{103}$$

で書くこともできるのである．$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ を展開する仕方のこれらの選択肢は，第3章での，EPRパラドクスの議論で用いられる．

第4章で出会うもう1つの問題は，相関関数

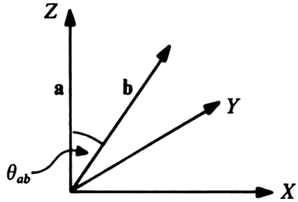


図 7　式 (104) の相関関数 $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を評価するための座標系の選択.

$$c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{a})\otimes(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{b})\rangle_{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle} \tag{104}$$

の評価の問題である．図7のように，Z軸を単位ベクトル$\mathbf{a}$の方向にとり，X軸を単位ベクトル$\mathbf{b}$がXZ平面内にあるようにとり，$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の角度をθ_{ab}とすると，

$$c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle\Psi_{\text{singlet}}|(\sigma_{1z}\otimes(\sigma_{2z}\cos\theta_{ab}+\sigma_{2x}\sin\theta_{ab}))|\Psi_{\text{singlet}}\rangle)$$

と書ける．$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に対する（102）の形を用いると，式（73）と（74）から，$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に対するパウリのスピン作用素の影響を評価することができる．したがって，単純な結果

$$c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos\theta_{ab} \tag{105}$$

を得る．最後に，評価

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{a}=+1/\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{b}=+1)\\
&=\frac{\mathrm{Prob}(+1, +1)_{\sigma_1\cdot\mathbf{a},\ \sigma_2\cdot\mathbf{b}}}{\mathrm{Prob}(+1)_{\sigma_2\cdot\mathbf{b}}}\\
&=\frac{|\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{a}=+1|\langle\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{b}=+1|(|\Psi_{\text{singlet}}\rangle)|^2}{||\langle\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{b}=+1|(|\Psi_{\text{singlet}}\rangle)||^2}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ab}}{\frac{1}{2}}=\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ab}
\end{aligned} \tag{106}$$

を行なうことができる．ここに，式（82）を用いた．この結果も後に（4.4節）用いられる．

2つのスピン1粒子の1重項状態

この場合の結果は，

$$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|S_{1z}=+1\rangle|S_{2z}=-1\rangle$$
$$+|S_{1z}=-1\rangle|S_{2z}=+1\rangle-|S_{1z}=0\rangle|S_{2z}=0\rangle) \qquad (107)$$

である．再び，結果は回転に対して不変となる．$\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_2$ の Z 軸方向のスピン成分を任意の方向 $\mathbf{n}$ のスピン成分で置き換えたときも，同様に表現される．さらに，展開（107）は，式（95）を用いて，2 つの粒子に結びついたスピン・ハミルトニアン H_{s1}，H_{s2} の固有ケットを用いて表現し直すこともできる．結果は

$$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|a+c\rangle|a+c\rangle-|b+c\rangle|b+c\rangle-|a+b\rangle|a+b\rangle) \qquad (108)$$

ここでも，テンソル積の左側の要素は粒子 1 に関係し，右側の要素は粒子 2 に関係するという約束を用いている．

この式は，後に第 6 章で用いられる．

注と参考文献

量子力学のディラック定式化の古典的なものは，この問題に対する彼自身の著作である．これは 1930 年に初版が出て，いまは第 4 版 Dirac (1958) である．フォン・ノイマンの方法は von Neumann (1932) で提示されている．同じ方向でのより現代的な扱いは，Purgovečki (1981) が提供している．

論理－代数的方法は，Mackey（1963），Jauch（1968）および Varadarajan (1968)〔もとの 2 巻本は第 2 版（1985）で 1 巻本にまとめられ，かつ部分的に大幅に書き改められている〕を見よ．グリーソンの定理は Gleason（1957）で初めて証明された．もとの証明のより詳しい内容は Varadarajan (1968), vol. 1〔第 2 版の第 4 章〕にある．より初等的な議論は，Krips (1974), (1977) と Piron（1972）で与えられている．グリーソンの論文は，Hooker（1975）に再録されている．そこには，論理－代数的方法に関する原論文が多く集められていて便利である．

量子力学の角運動量のより詳細な扱いについては，Schiff（1968）や Messiah (1968) のような標準的教科書を見よ．これらの書物は，実際，本書で用いられる議論に必要なこと以上の詳しい内容を含んでいる．本書に対する必要な背景として推薦できるより初等的な教科書は，Gasiorowicz（1974）と Matthews（1974）である．

2　量子力学の解釈

前章では，量子力学の形式を，**最小道具主義解釈**と名づける解釈とともに提示した．この解釈は，量子化アルゴリズムと統計アルゴリズムによって次のことを述べるものである．つまり，その形式が，測定の可能な結果とどのように関係しているか，および，同一の量子力学的状態に準備された系に対する測定を何回も（原理的には，無限回）繰り返したとき現われる測定結果の相対頻度とどのように関係しているか，を述べる．

われわれは，かなりの議論を必要とする2つの観念をすでに導入している．測定とは何を意味するか，また，状態の準備を構成するのは何か．われわれは，まもなくこれらの論点に戻るだろう．しかしまず，解釈というものの**新しい**意味を導入しよう．これは，最小道具主義解釈（すなわち，数学の要素と物理量とを結びつける規則）で採用されている意味とは**異なる**ものである．量子力学の形式を最小道具主義によって解釈したとき，それによって予測された通りの統計的規則性が実際に現われるのはどのようにしてなのか．このような問題の**説明**に役立つのは，端的に言って，外的世界の本性に対するわれわれの理解の仕方であり，および，（あるいは）または，世界に対するわれわれの認識論的関係なのである．もちろん，われわれはこれらの規則性を単純に「野蛮な事実」として受け取って，そのままにしておくこともできるだろう．「野蛮な事実」を超え出て解釈を試みることは役立たずの形而上学的お荷物であり，厳格な物理学者はそれなしで済ますことができ，また，そうすべきである．これは，実証主義者，道具主義者，反実在主義者の道を進むことである．物理学における理論は，観察される事象の間の規則性を表現する道具**である**にすぎない．便利さ，経済性，単純性のみがよい理論の基準である．観察のレベルを超えるなんらかの意味で，理論が真であると考えてみることなど，絶対にしてはならな

い．実際，われわれは，**第1の意味において**量子力学の形式に最小道具主義解釈を加えたものを，**第2の意味で**の最小道具主義解釈としてしばしば言及するだろう．理論物理学に対するそのような態度に賛成あるいは反対の議論を繰り返すことは，本書の目的には含まれていない．ここでは次のことを指摘すれば十分だろう．観察語と理論語の区別が素朴であること，また，上述のような理解の仕方では，量子力学のような主要な理論的進歩における数多くの新しい予測の成功例を，その通りに信じることができないこと，である．

本書の目的のために，われわれは，上に述べた第2の意味での解釈を欠く理論は自然界に対するわれわれの**理解**に資することができない，と仮定しよう．もちろん，説明と理解をこのように要求するからといって，そこに多くを期待しすぎないようにしなければならない．XがYを説明するとき，われわれは，Xを説明するものは何か，と常に問い続けることができる．Xを単に受け入れなければならないのならば，なぜ，Xまで行かずに，単にYを受け入れることをしないのか．この問題を十分に論じようとすると，科学哲学の主要な領域——説明の本性の問題——に入り込むことになるだろう．われわれは，いくつかの一般的な注意を与えることで満足しよう．YがXから論理的に演繹可能であることを，XがYを説明することの必要条件として，われわれが受け入れていると仮定しよう．Yの理解に対する要求をちょうどXを受け入れるレベルで止めることが，Yをそのまま受け入れることよりも進歩であると，われわれが感じるのは，Xのどのような特徴によるのであろうか．ここでの鍵は，Xの「統一化」効果であるように思われる．Xにおいて表現されている実在の本性についての，いくつかの一般的原理は，Yをも含めて，一見無関係な観察上のきわめて多様な規則性を包括する．しばしば主張されることだが，XがYの真正の理解の基礎を提供すべきならば，Xは「描像可能」でなければならないとされる．これが意味するのは，Xが，マクロ的な古典物理学のあるお馴染みの分野に**相似的モデル**をもたねばならないということである．われわれは，「描像可能性」の要請を主張しないけれども，これは，量子力学の解釈に対するいくつかの接近法においては，確かにある役割を演じている．

解釈という観念を明らかにするために，「量子力学におけるオブザーバブル（Qとする）の値について，系の状態がQの固有状態でないときに，何を言う

ことができるか」と問うことにしよう．この問いに対して与えられてきた答えを，一般的に3つの種類に分類しょう：

見解A：Qは，くっきりした，しかし，知られていない値をもっている．

見解B：Qは，ぼやけた，すなわち，「ファジーな」値をもっている．

見解C：Qの値は，定義されない，すなわち，「無意味」である．

これら3つの見解を，順次論じよう．

2.1　見解A：隠れた変数

見解Aは，量子力学が実際は不可思議でもなんでもないと言う．それは，単に，栄光に輝く統計力学にすぎない．明確な諸性質をもつ実体からなる客観的な外的世界が存在する．それらの諸性質は，端的に，測定によって発見される．測定前の状態において，オブザーバブルの正確な値が所有されているから，測定において正確な結果が得られることの説明ができるのである．いかなるものも，ぼやけていたり，ファジーであったり，定義されていなかったり，無意味であったりしない．もちろん，見解Aを一人前の解釈に仕上げるには，もっと多くのことをしなければならないだろう．オブザーバブルの所有値の完全な力学を述べる必要があるだろうし，このことは，非可換な，あるいは，非両立なオブザーバブルが同時にゼロ分散をもつ状態を準備することがなぜ不可能なのかの説明を，組み込んでいなければならないだろう．これが，量子力学のいわゆる隠れた変数解釈において思い描かれているプログラムである．

その考えは，次のような仕方で表現できる．ひと組の「隠れた」変数を導入し，これらを集団的に記号λで示そう．与えられたλに対して，すべてのオブザーバブルの値は，隠れた変数の可能な値の集合Λの上で定義された適当な実数値関数の値として指定される．オブザーバブルQに対して，量子力学的状態$|\psi\rangle$におけるQの値を，記号$[Q]^{|\psi\rangle}$で示す．いま，関数$[Q]^{|\psi\rangle}:\Lambda\to\mathbb{R}$として考えて，隠れた変数が値$\lambda$をとるときの$Q$の値を，$[Q]^{|\psi\rangle}(\lambda)$で表わそう．状態$|\psi\rangle$における隠れた変数の確率密度関数を，$\rho_\psi$で表わそう．よって，$\rho_\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$は，集団的な隠れた変数が，$\lambda$から$\lambda+\mathrm{d}\lambda$までの領域にある確率を表わす．このとき，状態$|\psi\rangle$における$Q$の期待値は

$$\langle Q\rangle_\psi=\int_\Lambda [Q]^{|\psi\rangle}(\lambda)\rho_\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (1)$$

(1) における積分は，隠れた変数の可能な値の領域Λ全体にわたる．さて，量子力学の隠れた変数解釈は，次の問いに肯定的に答えなければならない．すべての状態 $|\psi\rangle$ とすべてのオブザーバブル Q に対して，関数 $[Q]^{|\psi\rangle}$ と確率密度 ρ_ψ を適当に選んで，(1) による計算の期待値 $\langle Q\rangle_\psi$ を，前章で論じた統計アルゴリズムによって与えられる量子力学的期待値に一致させることができるだろうか．

次のことに注意することは重要である．われわれが隠れた変数解釈と名づけたものは，すべてのオブザーバブルがつねにくっきりした値をもつというもとの考え以上に，ある付加的な仮定をすでに導入している．われわれは，空間Λを確率空間，つまり，確率測度をもった隠れた変数の空間，と見なしている．それは，量子力学的状態 $|\psi\rangle$ には，隠れた変数の正確な値に対するわれわれの**無知**が含まれていることを表わしている．オブザーバブルは，いまや，この確率空間上の確率変数として表わされる．この構成の結果として，すべてのオブザーバブルは，両立可能であろうとなかろうと，はっきり定義された結合確率分布をもつ．なん人かの人たち，特にアーサー・ファインは，非両立なオブザーバブルに対して結合分布の仮定を課すのは合理的でない，と考えている．

式 (1) に戻って，隠れた変数解釈の背後にある考えというのは，$|\psi\rangle$ による状態記述が不完全であって，すべてのオブザーバブルの値をくっきりと示すためには λ を示して補完しなければならない，というのである．このとき，量子力学的期待値は，隠れた変数の上で，確率密度 $\rho_\psi(\lambda)$ に応じた重みをつけて，くっきりした値の平均をとることによって生じてくる．λ は，直接測定したり制御したりできないために，隠れた変数と呼ばれる．この条件は，非両立なオブザーバブルを含むすべてのオブザーバブルに対して分散のない状態を**準備する**ことを不可能にするために必要である（これは後に2.5節で説明する）．$[Q]^{|\psi\rangle}(\lambda)$ なる表記は，与えられた λ の値に対する Q の値が，量子力学的状態 $|\psi\rangle$ に依存することを示していることに注意しよう．隠れた変数理論のある議論においては，このことは仮定されていない．すなわち，$[Q]^{|\psi\rangle}(\lambda)$ は $|\psi\rangle$ には依存せず λ のみに依存すると仮定されている．しかし，つねに $|\psi\rangle$

をλの一部に含めることができるので，実際には，一般性を失うことにはならない．もっとも，そのときには隠れた変数というのは誤った名称となる．

見解 **A** を採用する量子力学の解釈は，しばしば，実在主義的として記述されている．そのような解釈のもとでの言明は，その主張する性質や関係が，人間精神の経験から独立に存在する客観的外的世界の事実に対応するかどうかによって，真または偽となる．量子力学の実在主義解釈のこの考えには，2つの側面がある：

1. その解釈は，経験的予測を引き出すための単なる道具にとどまらず，それ以上である．この意味で，それは**反道具主義的**である．
2. それは，解釈を詳述することにおいて人間の意識がなんの役割も演じないという意味で，**反観念主義的**である．

見解 **A** の魅力の1つの理由は，それが古典物理学の方法と概念に密着して組み立てられていることにある．この意味で，それは，馴染みのないものを馴染みあるものに還元していると特徴づけることができるだろう．しかし，量子力学のそのような解釈は可能なのか．これは，実際，本書が関わる主要な問いである．われわれは後に見ることになるが，これが量子力学を解釈する，すなわち理解する，可能な道でないことを，見解 **A** にさらにいくつかの特徴を組み入れることによって，実際に示すことができるのである．しかし，そこで重要になる点は，そのような強い主張を可能にするこれら付加的特徴とは何かについての議論であろう．われわれが本書で実際に行なおうとしていることは，量子力学を解釈する可能な方法としてのある形而上学的ユニットセットを排除することである．それは，――何がうまくいかないかを述べる――否定的な歩みであって，量子力学がわれわれを実在のどのような描像のもとに連れていくかについての肯定的な主張ではないだろう．しかし，にもかかわらず，この否定的な性質を帯びた一般的な結果が物理学の哲学において可能であるということは，われわれにとってきわめて意義深いことと思われる．

2.2　見解 B：傾向性と潜在性

量子力学のいくつかの初等的教科書は，ぼやけた，あるいは「ファジーな」値という言葉をよく用いている．しかし，そこで実際に意図されているのは，

オブザーバブル Q が値をまったくもっていない，ということである．量子力学的系が現実にもっているのは，オブザーバブル Q に関して，測定するときにさまざまの可能な値を生じる**傾向性**（propensity），あるいは**潜在性**（potentiality）なのである．見解Bの言うところによると，量子力学は，古典物理学が採用する概念の他に新しい概念をもちださざるをえないという点で，不可思議な**のである**．「新しい」という言い方は，ただ，古典物理学との関係で理解されなければならない．実際，潜在性という観念は，アリストテレス自然学──大ざっぱに言うと，ドングリは樫の木になる潜在性を「もっている」，すべての変化は潜在性質の現実化に他ならない──の中心であった．ハイゼンベルクは，量子力学の哲学に関する晩年の著述のなかで，このタイプの解釈とアリストテレスとの親近性を特に強調しようとしていた．見解 B の別の表現は，マーゲナウの「潜在的」(latent) 量という概念による．彼はこれを，古典物理学で考えられている「所有された」量と対比している．オブザーバブルの測定をその固有状態でない状態で行なうことは，潜在（latent）値を所有値に変えることである，と想定される．これは，見解 B のもとでの，測定の一般的な機能である．ぼやけた値をくっきりした値に変えること，潜在性質を現実化することである．

さて，重要な問題を考えなければならない．見解 B は，量子力学の実在主義解釈なのか．次のような議論が行なわれてきている．傾向性は，物理系そのものの性質ではなくて，むしろ，**繰り返し可能な**実験的配置あるいは装置を同時に考えたときにミクロ系がもつ関係的性質なのである．こういった装置は，測定のさまざまの可能な結果に対して，傾向性を長期的な相対頻度として表わす役割を果たしている．傾向性のこの関係的な側面は，ミクロ系がわれわれの実験的探索から独立に性質をもっているのではないという意味で実在主義に対立する，と主張されたりする．しかし，2つの点に注意しておかなければならない．

1．傾向性が，他の傾向的（dispositional）性質と同じく，実験的配置あるいは装置の文脈において現われるというのはその通りであるが，しかし同時に，傾向性を，それが現われるのに先立って，また，現われ方から独立に，ミクロ系の性質と見なすこと，しかもミクロ系が真に所有している性質と見なすこと

に，不整合なところはなにもない．この窓ガラスは割れやすさという性質をもっているという主張を考えてみよう．この性質は，レンガを投げつけてみれば，明らかになるだろう．こういった言い方は，われわれが窓ガラスの割れやすさについて徹底して実在主義者となりえないことを示唆しているわけではない．それでは，なぜミクロ系の傾向性について実在主義者であってはいけないのか．もちろん，後者の主張に反対する人は，こう続けるだろう．傾向的性質は2次的性質である——窓ガラスが所有するのは分子構成の1次的性質であって，これらの1次的性質が，レンガを投げつけるとなぜ窓ガラスが割れるかを説明する．このことの他に，窓ガラスが所有する割れやすさという1次的性質は存在しない．さて，これは，窓ガラスについては正しいであろう．しかし，（ロックの用語に従うが）ミクロ物理学においても，傾向的性質をそれ以上還元不能な1次的性質と見なしてはいけないという結論にはならない．すべての性質は，1次的なものではなくて2次的なものであり，純粋に2次的性質の科学はバークレイ的観念主義にならざるをえないということを根拠にして，量子力学のなんらかの観念主義解釈を支持する議論は，確かに，ここには何も存在しない．

2. ここから，第2の論点がでてくる．傾向性が現われる実験的探索は，人間の精神や意識とは無関係である．人間がまったく存在しなくても，すべては世界において生じる．われわれが実験を考案しそれによって外的世界のある種の情報を得ようとしているという事実は，この文脈ではまったく無関係である．

結論はこうである．見解 B は，実在主義と完全に整合的であり，観念主義を支持する議論を，確かに，なにも提供していない．

2.3　見解C：相補性

見解 C は，本質的には，ボーアが採用した見解であり，量子力学の正統的コペンハーゲン流の相補性解釈にもとづいている．量子力学に対するボーアの見解を詳細に分析することが，本書の目的の一部をなしているのではない．われわれは，いくつかの顕著な特徴にコメントをつけるだけにしよう．

1. Q の非固有状態において Q を定義することができないということを，Q の測定可能性に対する制約の反映と見なすことは，誤解であろう．すなわち，

ここにいう制約とは，そのような状態でQを測定すると，測定結果は分散し，もとの量子力学的状態において「くっきりした」値をもっていた非可換なオブザーバブルQ'の値についての知識が，同時に，不可避的に失われる，という制約のことである．ここで，「くっきりした」というのは，系の状態がQ'の固有状態であり，Q'の測定結果を（確実にではなくても，確率1で）予測できることを意味する．この制約の別の言い方をすると，Qの非固有状態を準備すると，その後のQの測定によるQの値について，正確な知識〔予測〕なしですまさざるをえない，ということである．ボーアにとって，Qを定義できないということは，Qを知りえないということ（実証主義タイプの議論）にもとづいているのではない．むしろ，逆である．（いま説明した意味で）Qを知りえないということが，Qを定義できないということにもとづいている．

2. 定義可能性の基盤というのは，量子力学的「現象」を現出させる実験的配置が一般に相互に排他的であることである．

3. 相補性とは，相互に排他的な量子力学的現象の間に存在する1つの関係である．相補的現象は同時に「生じる」ことができないけれども，そのそれぞれは可能であることが，量子力学的実在の完全な記述にとって必要である．

4. 量子力学的現象を述べることに含まれる実験的配置の記述には，古典物理学の概念と言語を採用しなければならない．

5. しかし，これは，マクロな装置自体が量子力学の形式を受けつけないことを，意味しているのではない．われわれが量子力学を用いるか古典物理学を用いるかは，マクロな装置の役割に関係する．装置が「観測」を行なうかぎりは，古典物理学を用いなければならない．しかし，装置自体が（他のマクロな装置による）観測の対象ならば，量子力学による記述が採用されなければならない．

大まかに言うと，見解Cのもとで量子力学は不可思議**である**．それも，新しい概念を必要とするという意味ではなくて，古典物理学における馴染みの概念がある文脈では定義できないという形でその適用可能性の制限を認めるという意味において，不可思議なのである．

ボーアにとって本質的な点は，量子力学的現象の記述に対してもつ古典的概念の優位性である．ある意味において，ミクロ物理学はマクロな古典物理学に

還元される．しかし，上で見たように，これは，マクロな対象自体が量子力学の形式を受けつけないのではない，という認識と結びついている．

量子力学の相補性解釈を評価するさいの困難が，ボーアの考えの一般的枠組みに対するボーア自身の定式化の曖昧さと多義性にあることは，疑いない．方法論的観点から，主たる反論は，ボーアが量子力学的系に対してはある問いを発することさえきっぱりと禁じたことにある．ボーアにとって，相補性は重要な哲学的発見であった．それは，量子物理学の文脈で行なわれたけれども，（ボーアの見解では）人間の知識における，心理学や社会学のような，他の分野にも適用できるものであった．曖昧な哲学的予断にもとづいて，科学的理論構成に対して独断的な制限を設けることは，科学活動の本性に対する推測－誤謬主義的接近法の立場からは，危険な偏見である．これゆえに，本書では，量子力学の解釈に対する他の接近法がもっぱら取り上げられる．

2.4　測定と状態準備

古典物理学において，対応的測定という観念にはなんの問題もない．調べられている系 S が所有している量 Q と，測定装置 A に固有のある量（R としよう）との間の対応関係は，確立している．したがって，Q が（適当な単位のもとで）値 q をもつならば，R は値 $\rho(q)$ をもつ．ここに，$\rho:\{q\}\to\{r\}$ は，Q がとりうる値の集合 $\{q\}$ から，R がとりうる値の集合 $\{\mathrm{r}\}$ への可逆な 1 対 1 写像である．写像に可逆性を要求するのは，単に，異なる Q の値に異なる R の値を対応させるためである．よって，R の値を知れば，対応する Q の値を一意に選び出すことができる．したがって，Q の値を測定する問題は，R の値を見出す問題に還元される．これは，単に，もとの問題を S から A に移したにすぎないように見える．今度は，R を測定して値を見出すために，R と，たとえば，R' を対応させる別の測定装置 A' を導入しなければならないのであろうか，等々．しかし，この後退は，R になんらかの意味で直接的な観察可能性を要請することによって避けられる．有名な「指針の読み」は，古典的測定の図式的な説明を与えている．Q 自身が「直接的に」観察可能ならば，装置 A を導入する必要はないだろう．測定が果たす機能は，「直接的に」観察可能でないものの値を，「直接的に」観察可能なものに対応づけることである．

もちろん，S の Q の値と，A の R の値との間に必要な対応関係が成立するためには，S と A の間にある種の相互作用が生じなければならない．この相互作用は，Q の値に影響することもありうる．もしも，測定の相互作用が生じる前に Q が値 q をとり，相互作用の後に値が q' に変わったならば，R の観察は，ρ の逆写像によって，値 q を与える．測定は，A との相互作用がなされる前に Q がもっていた値を知らせるように考案された，後ろ向きの過程になっている．しかし，q を知り，さらに A との相互作用の詳細も分かっていて，相互作用後の値 q' を予測できると仮定しよう．このときは，測定相互作用を，前向きの装置と見なすことができるだろう．これによって，われわれは，S と A の相互作用が終わった後に Q がとる値 q' を示すことが可能になる．よって，それは，Q が値 q' をとるように S の状態を準備する状態準備装置として機能している．S の Q を再度測定するならば，この値 q' が得られ，Q の新しい値 q'' を準備することになるだろう．もちろん，S と A の相互作用は Q の値を変えず，$q'=q$ であるようなものかもしれない．これを，非攪乱測定と呼んでもよいだろう．しかし，概念的には，測定の 2 つの異なる側面がつねにある——A に関係する側面，つまり測定の真の側面と，S に関係する側面，つまり状態準備と呼べる側面，である．

再び古典物理学においては，相互作用の大きさを，原理的に，きわめて小さくでき，測定によって Q が攪乱されないだけでなく S もまったく影響を受けないようにできると仮定しよう．さて，この古典的測定の図式が，量子力学の文脈において，どの程度保たれうるのかを見ることにしよう．

最も単純な可能な場合を考えよう．これを**理想的**測定と呼ぶ．Q を，離散的スペクトル $\{q_i\}$ をもつ極大（縮退のない）オブザーバブルとする．S の量子力学的状態は，Q の固有状態 $|q_i\rangle$ であるとし，S を装置 A と相互作用させよう．さらに，A も量子力学の形式で記述され，A は初めに R の固有状態 $|r_\circ\rangle$ にあり，相互作用の結果，A の状態は $|r_\circ\rangle$ から $|r_i\rangle$ に変わり，しかし S の状態は変わらず $|q_i\rangle$ にあるとする．

したがって，結合系 $S+A$ の状態は，相互作用前の $|q_i\rangle|r_\circ\rangle$ から相互作用後の $|q_i\rangle|r_i\rangle$ に移行する．作用素 Q と R は，結合系の作用素と考えると，それぞれ，$Q\otimes I$，$I\otimes R$ と書かれなければならない．ただし，テンソル積の第 1

因子はSに関係し，第2因子はAに関係する．相互作用前後の状態は，$Q\otimes I$と$I\otimes R$の同時固有状態であるから，値q_iを，相互作用前後においてSがもつ値と見なすことができ，値r_oを，測定前にAがもつ値，値r_iを，測定後にAがもつ値，と見なすことができる．（オブザーバブルが値をもつと言われうる条件は，第3章でより詳細に検討する．）すべては，非攪乱測定の古典的な場合と，まったく並行的であり，Rの値r_iは，Qの値q_iに関係づけられる．

しかし今度は，初期状態が

$$|\psi\rangle=\left(\sum_i c_i|q_i\rangle\right)|r_o\rangle \tag{2}$$

で与えられ，よって，Sの状態が，確率振幅c_iをもつQの固有状態の重ね合わせになっている，と仮定しよう．

量子力学における時間発展作用素の線形性の結果として，測定後の結合系の状態は，

$$|\psi'\rangle=\sum_i c_i|q_i\rangle|r_i\rangle \tag{3}$$

となるだろう．ただし，r_iはすべて異なると仮定する．

統計作用素を用いることにしよう．測定前において，結合系の統計作用素は

$$W=P_{|\psi\rangle}=P_{(\sum_i c_i|q_i\rangle)|r_o\rangle} \tag{4}$$

測定後において，結合系の統計作用素は

$$W'=P_{|\psi'\rangle}=P_{\sum_i c_i|q_i\rangle r_i\rangle} \tag{5}$$

しかし，測定後の統計作用素として，われわれが期待するのは，W'ではなくて，

$$W''=\sum_i|c_i|^2P_{|q_i\rangle|r_i\rangle} \tag{6}$$

である．W''は，状態$|q_i\rangle|r_i\rangle$にある系の集団を記述する混合状態であって，この混合において，状態$|q_i\rangle|r_i\rangle$を見出す確率が$|c_i|^2$となっているのである．混合の成分状態それぞれは，Qが値q_iをもち，Rが値r_iをもつと適切に述べることのできる状態であり，確率$|c_i|^2$は，個々の測定において，Rの（そしてQの）くっきりした値のどれが現われるかを，われわれが知らないということを表わしているのである．量子力学における混合状態をこのように解釈する仕方は，通常，混合の無知解釈と称されている．われわれは，それについて，

まもなくもっと多くのことを述べるだろう．

量子力学におけるいわゆる測定の問題というのは，終状態の統計作用素としてほしいのは W'' であるのに，量子力学の形式の結果として得られるのは，それとは異なって，W' である，ということにある．

W' と W'' の違いを，もう少し詳しく見よう．まず，W' は**純粋**状態を記述する．それは，ベキ等作用素である．（数学的付録191頁を見よ．）$|\psi'\rangle$ は，$Q\otimes I$ や $I\otimes R$ の固有状態ではない．初期状態 $|\psi\rangle$ は，$Q\otimes I$ の固有状態ではないけれども，$I\otimes R$ の固有状態である．測定による相互作用の影響は，2重になっている：

1. それは，結合系をなお $Q\otimes I$ の非固有状態に置く．
2. それは，結合系を $I\otimes R$ の非固有状態に変える．

言い換えると，出発点にとった $Q\otimes I$ の固有状態の不可思議な重ね合わせが，取り除かれないだけでなく，さらにまずいことには，装置のオブザーバブル R も，重ね合わせに汚染されてしまっている．

測定問題を扱う可能な方法を論じる前に，次のことに注意しておこう．結合系 $S+A$ のすべてのオブザーバブルが，W' と W'' で示される状態において，異なる期待値をもつという意味で，これらの状態を区別できるわけではない．結合系のオブザーバブル J が，W' と W'' を区別できないとき，これを**無反応** (insensitive) と呼ぼう．任意の J に対して，2つの期待値

$$\langle J\rangle_{W'}=\langle\psi'|J|\psi'\rangle$$

$$=\sum_i |c_i|^2\langle J\rangle_{|q_i\rangle|r_i\rangle}+\sum_{i\neq j}\sum_j c_i^* c_j\langle q_i|\langle r_i|J|q_j\rangle|r_j\rangle \tag{7}$$

$$\langle J\rangle_{W''}=\sum_i |c_i|^2\langle J\rangle_{|q_i\rangle|r_i\rangle} \tag{8}$$

を考えよう．(7) と (8) の違いは，$\langle J\rangle_{W'}$ に寄与する「干渉」項にある．

J が無反応になる条件は，明らかに，この項が消えることである．これは，Q' を S の任意のオブザーバブルとして，J が $Q'\otimes I$ の形のとき，確かに成立する．なぜなら，

$$\langle q_i|\langle r_i|Q'\otimes I|q_j\rangle|r_j\rangle=\langle q_i|\langle r_i|((Q'|q_j\rangle)\otimes|r_j\rangle)$$
$$=\langle q_i|Q'|q_j\rangle\langle r_i|r_j\rangle$$

$$=\langle q_i | Q' | q_j \rangle \delta_{ij}$$
$$=0 \qquad (i \neq j)$$

さらに，

$$\langle Q' \otimes I \rangle_{W'} = \langle Q' \rangle_{W^s} \tag{9}$$

を見るのは，容易である．ただし，

$$W^s = \sum_i |c_i|^2 P_{|q_i\rangle} \tag{10}$$

これは，次のことを示している．結合系が状態 W' にあるとき，系 S の状態は，S のみに関係する任意のオブザーバブルの測定に相対的に，(10) で与えられる統計作用素 W^s で特徴づけられる．あるいは，別の言い方をすると，純粋状態 W' は，S のみに対してその後になされる測定に関しては，混合のように振舞うのである．

同様の結果は，装置のみに関係する任意のオブザーバブル R' に対しても成立する．

$$\langle I \otimes R' \rangle_{W'} = \langle R' \rangle_{W_A} \tag{11}$$

ただし，

$$W^A = \sum_i |c_i|^2 P_{|r_i\rangle} \tag{12}$$

したがって，W' と W'' を区別するためには，S に関係するオブザーバブルと，A に関係するオブザーバブルとの間の，ある種の相関測定を行なわなければならない．しかし，任意の R' に対する $Q \otimes R'$ と，任意の Q' に対する $Q' \otimes R$ は，無反応オブザーバブルであることに注意することは重要である．これを見るために，

$$\langle q_i | \langle r_i | Q \otimes R' | q_j \rangle | r_j \rangle = \langle q_i | \langle r_i | ((Q | q_j \rangle) \otimes (R' | r_j \rangle))$$
$$= q_j \langle q_i | q_j \rangle \langle r_i | R' | r_j \rangle$$
$$=0 \qquad (i \neq j)$$

に注意しよう．$Q' \otimes R$ に対しても，同様である．

S と A に関係するオブザーバブルのテンソル積オブザーバブルによって，W' と W'' を区別するためには，$Q' \otimes R'$ のようなオブザーバブルの期待値を測定しなければならない．ただし，Q' は $\{|q_i\rangle\}$ による表現で対角的ではな

く，R' は $\{|r_i\rangle\}$ による表現で対角的でないとする．測定問題で重要な点は，結合系に対して，無反応でないオブザーバブルが存在することである．

量子力学の哲学において，測定問題を論じている文献はきわめて多い．測定問題が生じるのは，測定の相互作用と装置の振舞いの両方を，量子力学の法則に支配されるものとして記述しようとするからである．1つの「解法」は，この統一的な接近法を否定することにある．量子力学における時間発展には2種類ある．1つは，時間を含むシュレーディンガー方程式に支配されるユニタリな時間発展であり，もう1つは，まったく異なる種類の時間発展であって，測定の相互作用の記述に適しており，W から W' を導くのではなくて，W から W'' を導くものである．この解法の難点は，量子力学において測定の相互作用を他の種類の相互作用から区別するのが何なのかを決定することにある．他の解法は，測定装置のマクロ的な性質と，測定操作の非可逆な性質に注意を向けている．図式的に述べるために，測定過程が，系 A, A', A'', ... の系列と元の系 S の間に，一連の対応関係を実際に成立させていると仮定しよう．そうすると，最後の統計作用素は，

$$W' = P_{\sum_i c_i|q_i\rangle|r_i\rangle|s_i\rangle|t_i\rangle\ldots} \tag{13}$$

となるだろう．ただし，r_i，s_i，t_i... は，系 A, A', A'' ... に結びついたオブザーバブル R, S, T... の固有値である．

要請される混合は，

$$W'' = \sum_i |c_i|^2 P_{|q_i\rangle|r_i\rangle|s_i\rangle|t_i\rangle\ldots} \tag{14}$$

となるだろう．この場合，W' と W'' を区別するには，

$$Q'\otimes R'\otimes S'\otimes T'\ldots$$

のようなオブザーバブルの多重相関測定によらなければならない．ただし，成分オブザーバブルのどれも，Q, R, S, T... を対角化するそれぞれの表現において対角化されない，とする．明らかに，「増幅」系列の段階の数が大きくなると，要請される多重相関実験によって W' と W'' を区別するときの実際上の困難さはますます処理しにくくなり，段階の数が無限になる理想化された極限では，もうお手あげということになるであろう．しかし，量子力学の解釈のこの側面はきわめて問題を含んでいると言っておくのが公平である．本書でわ

れわれは，測定問題が解かれたと仮定する，たとえば，「2 つの時間発展」解法に対する反論は，単に無視することにする．われわれは，量子力学の他の解釈問題に注目することにしよう．

次に，われわれは，なんらかの仕方で，測定相互作用後の実際の統計作用素が，純粋状態 W' ではなくて，混合 W'' になることを確定できたと仮定しよう．しばらくの間，また，単純な 1 段階測定機構に戻ることにして，これは，混合の成分状態が，実際に $|q_i\rangle|r_i\rangle$ であることを確立するだろうか． W'' が $P_{|q_i\rangle}$ によって一意に分解されないので，この問いが生じるのである．他の射影作用素の混合もこれと同じ統計作用素をもつ．$|\psi_i\rangle=|q_i\rangle|r_i\rangle$ と書こう．よって，$W''=\sum_i |c_i|^2 P_{|\psi_i\rangle}$．次に，極端な，しかし教訓的な例として，系 S が N 次元ヒルベルト空間によって記述され，W'' を定義する和において i は 1 から N まではしり，確率的な重み $|c_i|^2$ はすべて等しい，つまり，すべての i に対して $|c_i|^2=1/N$ と仮定しよう．このとき，

$$W''=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_{|\psi_i\rangle}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_{|\phi_i\rangle} \tag{15}$$

を示すことができる．ただし，ケット $|\phi_i\rangle$ は，ケット $|\psi_i\rangle$ から任意のユニタリ変換によって導かれたものである．

よって，

$$|\phi_i\rangle=\sum_{j=1}^{N} c_{ij}|\psi_j\rangle$$

と仮定しよう．ここに，行列（c_{ij}）はユニタリであり，よって

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ij}c_{ik}^{*}=\delta_{jk}$$

そうすると，(15) の右辺は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\phi_i\rangle\langle\phi_i| &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_{ij}c_{ik}^{*}|\psi_j\rangle\langle\psi_k| \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} c_{ij}c_{ik}^{*}\right)|\psi_j\rangle\langle\psi_k| \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{jk}|\psi_j\rangle\langle\psi_k|\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}P_{|\psi_i\rangle}$$

$$=(15)\text{ の左辺}$$

よって，状態 $|\psi_i\rangle$ の等確率混合は，状態 $|\phi_i\rangle$ の等確率混合と，正確に同じ統計作用素をもっている．したがって，ただ W'' が与えられるだけならば，それがどの状態の集合の混合なのかを言うことができない．

この種類の結果から，また，確率の重みが等しくない場合（このとき，混合における状態は直交しなくなる）への拡張から，ある人々は，混合の無知解釈に疑問をなげかけるようになっている．しかし，この多義性から実際に推論できるのは，われわれは思っているよりも実際にはもっと無知だ，ということなのである――結合系 $S+R$ が，測定の結果として，多くの集合 $\{|\psi_i\rangle\}$ のなかのどの状態に置かれているかを，われわれは知らない，そして，たとえ可能な状態の選択が $\{|\psi_i\rangle\}$ に限定されたとしても，系がどの状態に置かれているかを，われわれは知らない．とにかく，$\{|\psi_i\rangle\}$ が，装置 A のある直接的に観察可能な特徴 R を対角化する状態ならば，測定の結果として A は，R がくっきりした値 r_i をもつ状態の混合状態に置かれると主張しても，統計作用素 W'' との間に，**矛盾が生じるわけではない**．しかし，次のより**強い**主張，つまり，測定の結果として A は，R がくっきりした，だが知られていない値をもつ状態に実際に置かれているのだ，という主張ができないのは，やはり不満足であろう．

測定の形式的理論におけるこの欠点から移って，測定の状態準備の側面を考えよう．S と A の間の物理的相互作用によって混合 W'' を得たと仮定すると，$S+A$ 系に対して，R が特定の値 r_j をもつ部分集団を選び出すことができる．この部分集団は，統計作用素

$$W'''=P_{|q_j\rangle|r_j\rangle} \tag{16}$$

によって記述されるだろう．W''' は，Q と R の双方に関して純粋状態となっており，S 系を Q に対するくっきりした値 q_j でもって記述する．W''' は，W'' から物理的相互作用の結果として生じているのではないことに注意しよう．われわれが，A の直接的に観察可能な特徴 R に関して，値 r_j を示す $S+A$ 系の部分集団に注目しようと決めたとき，われわれが実際に行なったのは，ある

「心的な」操作なのである．こう述べたからといって，われわれが，$S+A$ 系と見なしたときに R の値 r_j を示す S 系，したがって，Q の値 q_j を示す S 系すべてを，次の実験ができるように，空間のある領域に集める操作ができない，ということを意味しているのはない．しかし，統計作用素の指定によって，他の S 系を含めないようにするという決定は，物理的な操作ではなくて心的なものである．

この議論は，測定の量子論におけるいわゆる射影公準に関係している．S についてQを測定し値 q_j が見出されたとすると，測定直後の S の状態ベクトルは固有ケット $|q_j\rangle$ である，あるいは同じことであるが，統計作用素 $P_{|q_j\rangle}$ である，とよく言われる．われわれが，統計作用素 W'' に到る非選択的な測定相互作用を考えるだけでなく，W'' から W''' に到る選択的な段階をも考えるならば，上のことは，われわれが考察してきた（本質的に式(3)で示される）理想的測定の図式に対して，確かに正しい．しかしながら，測定相互作用前の結合系 $S+A$ の状態 $|q_i\rangle|r_o\rangle$ が，測定後に状態 $|u_j\rangle|r_j\rangle$ になる（ただし，状態 $|u_j\rangle$ は $|q_j\rangle$ に等しくないとする，もっとも，$|u_j\rangle$ は集合 $\{|q_j\}$ で展開できるが）と考えるほうが，はるかに現実的である．先に用いたのと同じ分解によって，次のことは容易に分かる．S の初期状態が重ね合わせならば，R の観察値 r_j にしたがって選択されるとして，測定の選択的な段階から，統計作用素 $P_{|u_j\rangle}$ が得られる．よって，この状況において，射影公準は，端的に偽である．もちろん，理想的測定の場合の特殊な性質というのは，S について Q を測定し結果 q_j を見出すならば，この特定の系に対して続いて行なう測定は，再び，値 q_j を与えるだろう（とにかく，そうなるだろうという確率が1である），ということである．ある意味ではこうも言える．つまり，理想的測定に対しては状態準備と測定との区別は不必要である．理想的測定は，測定されているオブザーバブルの固有ケットを準備するのである．しかし，これは，測定相互作用が状態準備の役割を果たすときにそれに必然的に付随しているのでないことは，確かである．

2.5　不確定性関係

ミクロ系 S に対する測定の影響の問題，測定の状態準備の側面を追求しよう．

前節で概説した理想的測定の図式において，測定相互作用の影響は，オブザーバブル Q 自身のそれに続いて行なわれる測定に関する統計には，なんの変化も生みださない．たとえば，測定相互作用前の状態 $W^S_{\text{initial}}=P_{\sum_i c_i|q_i\rangle}$ における Q の期待値は，単に，$\sum_i |c_i|^2 q_i$ であり，これは，状態 $W^S=\sum_i |c_i|^2 P_{|q_j\rangle}$ における Q の期待値と同じである．後者の状態は，測定相互作用後の S に属すオブザーバブルの測定に対する状態として，(10) で示されたものである．これを，以後，W^S_{final} と書いて，測定相互作用後の状態であることを強調しよう．

Q の統計が W^S_{initial} から W^S_{final} に移っても変わらないということは，オブザーバブル Q に関するかぎり，理想的測定が非攪乱的であるという事実を表わしている．しかし，これは，他のオブザーバブル Q' に関しても，Q の測定が S を「攪乱」しないことを意味しているのではない．

したがって，一般には，

$$\langle Q'\rangle_{W^S_{\text{initial}}}=\sum_i |c_i|^2\langle Q'\rangle_{|q_i\rangle}+\sum_{i\neq j}\sum_j c_i^* c_j\langle q_i|Q'|q_j\rangle \tag{17}$$

であり，

$$\langle Q'\rangle_{W^S_{\text{final}}}=\sum_i |c_i|^2\langle Q'\rangle_{|q_i\rangle} \tag{18}$$

Q' 自身が表現 $\{|q_i\rangle\}$ において対角的でないならば，(17) と (18) は，(17) にあって (18) にない付加的な「干渉」項のために，一般に異なる．Q の測定が Q 以外のオブザーバブル Q' に及ぼす攪乱効果は，量子力学の有名な不確定性関係の考察によって明らかにされるとしばしば考えられている．われわれは，結果を形式的に述べることから始めよう．A, B を，任意の状態 $|\psi\rangle$ にある系 S に属す 2 つの任意のオブザーバブルとしよう．

$$\left.\begin{aligned}\Delta A&=(\langle(A-\langle A\rangle_{|\psi\rangle}\cdot I)^2\rangle_{|\psi\rangle})^{1/2}\\ \Delta B&=(\langle(B-\langle B\rangle_{|\psi\rangle}\cdot I)^2\rangle_{|\psi\rangle})^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

と定義し，エルミート作用素 C を関係式

$$[A,\ B]=AB-BA=iC \tag{20}$$

で定義しよう．そうすると，不確定性関係は，

$$\Delta A\cdot\Delta B\geqq\frac{1}{2}|\langle C\rangle_{|\psi\rangle}| \tag{21}$$

を述べている．証明は，標準的なものである．任意の実数ρに対して，

$$T=A-\langle A\rangle_{|\psi\rangle}\cdot I+i\rho(B-\langle B\rangle_{|\psi\rangle}\cdot I) \tag{22}$$

と定義する．そうすると，

$$\langle T^{\dagger}T\rangle_{|\psi\rangle}\geqq 0 \tag{23}$$

これは，$\langle T^{\dagger}T\rangle_{|\psi\rangle}=\langle\psi|T^{\dagger}\cdot T|\psi\rangle$ がベクトル$T|\psi\rangle$ のノルムの2乗であって，負となりえないことから，導かれる．

しかし，

$$\langle T^{\dagger}T\rangle_{|\psi\rangle}=(\Delta A)^2-\rho\langle C\rangle_{|\psi\rangle}+\rho^2(\Delta B)^2 \tag{24}$$

したがって，式（24）の右辺は，ρの負でない2次式である．これは，判別式

$$(\langle C\rangle_{|\psi\rangle})^2-4(\Delta A)^2\cdot(\Delta B)^2\leqq 0$$

あるいは，（21）で述べたように，

$$\Delta A\cdot\Delta B\geqq\frac{1}{2}|\langle C\rangle_{|\psi\rangle}|$$

を，意味する．

帰結（21）の解釈は，以下の通りである．系Sを純粋状態$|\psi\rangle$に準備すると，同じように準備されたそのような系の集団においてAの測定がくり返された場合には，平均値$\langle A\rangle_{|\psi\rangle}$のまわりの標準偏差$\Delta A$が生じるであろう．同様に，$B$の測定によっては，標準偏差$\Delta B$が生じるだろう．

式（21）は，量子力学的状態$|\psi\rangle$において，A測定とB測定の標準偏差ΔA，ΔBを小さくすることに対する相反的限界を，状態$|\psi\rangle$におけるオブザーバブルAとBの交換子の期待値を用いて，証明している．もし，$\langle C\rangle_{|\psi\rangle}$が消えないならば，$A$測定の結果の標準偏差は，$\frac{1}{2}|\langle C\rangle_{|\psi\rangle}|/\Delta B$より小さくはなりえない．同様に，$\Delta B$は，$\frac{1}{2}|\langle C\rangle_{|\psi\rangle}|/\Delta A$より小さくはなりえない．

次の点に注意しておかなくてはならない：

1. $|\psi\rangle$がAまたはBの固有状態ならば，$\langle C\rangle_{|\psi\rangle}$はつねにゼロである．
2. ヒルベルト空間の次元が有限の場合，あるいは，無限次元であっても，AまたはBが純粋に離散的なスペクトルをもっている場合には，Cは恒等作用素の定数倍ではありえない．これは，次のことによる．AまたはBを対角化する表現において，注意1によって，Cの対角要素はすべてゼロ

である．他方，恒等作用素は，どの表現においても，対角要素 1 をもつ．不確定性関係の最も有名な適用例は，運動量と位置を表わすオブザーバブル P と Q に対するものである．1 次元の場合を考えると，関係式

$$[Q, P] = i\hbar \cdot I \tag{25}$$

を得る．よって，C は，単に $\hbar \cdot I$ である．この結果から，次のことがすぐ分かる．位置と運動量のオブザーバブルを，有限次元ヒルベルト空間の枠組みのなかで，把握することはできない．さらに，これらのオブザーバブルは，連続スペクトルの微妙さを含まなければならない（上の注意 2 を見よ）．しかし，不確定性関係は，やはり適用可能であり，単に，

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geqq \frac{1}{2}\hbar \cdot I \tag{26}$$

となる．

Q 測定が，$\{|q_i\rangle\}$ 表現において対角的でないオブザーバブル Q' に及ぼす攪乱効果に戻ろう．初期状態 $\sum_i c_i|q_i\rangle$ が Q' の固有状態であり，よって，初期には $\Delta Q' = 0$ と仮定しよう．しばしば，次のような議論がなされる．Q を測定すると，終状態は Q の固有状態の混合である．そのようなどの固有状態においても，Q' は，Q と Q' を含む不確定性関係の結果として，分散を示すことになる．不確定性関係の影響とは，Q の測定前には Q' が分散を示さなかったときに，Q を測定して，Q' に分散を生じさせることである．しかし，離散スペクトルをもつ量を測定する場合に，Q の固有状態において，Q' が分散を示すということは，一般に正しい（Q と Q' に対する共通の固有状態という特殊例を扱うのでないかぎり，正しい——非可換な作用素でも，**いくつかの**固有状態を共有しうるということを思い出しておこう）．しかし，これを，不確定性関係から演繹することはできない．というのは，上の注意 1 で見たように，不確定性関係の右辺は，どちらかのオブザーバブルの固有状態において，ゼロとなるからである．

にもかかわらず，不確定性関係は，**すべての**可能なオブザーバブルが分散のない状態の準備に関して，量子力学の形式に依ってわれわれの能力に課せられる，きわめて意義深い制限を表わしている．いかなる量子力学的状態もすべてのオブザーバブルに対して分散のない状態にはなりえないことを，統計アルゴ

リズムから，証明するのは，もちろん容易である．このことに対する条件は，

$$(\mathrm{Tr}\,WQ)^2=\mathrm{Tr}(WQ^2),\ \forall Q \tag{27}$$

となるだろう．

この条件を，任意の状態 $|\psi\rangle$ に対する $Q=P_{|\psi\rangle}$ に適用しよう．そうすると，

$$\begin{aligned}(\mathrm{Tr}(WP_{|\psi\rangle}))^2&=\mathrm{Tr}(WP_{|\psi\rangle}{}^2)\\&=\mathrm{Tr}(WP_{|\psi\rangle})\end{aligned}$$

を要請することになる．したがって，

$$\mathrm{Tr}(WP_{|\psi\rangle})=\langle\psi|W|\psi\rangle=0\ \text{または}\ 1,\ \forall|\psi\rangle$$

第1の可能性から，$W=0$，そして第2の可能性から，$W=I$．どちらも，$\mathrm{Tr}\,W=1$ と両立しない（$\mathbb{H}$ の次元>1 と仮定している）．ある $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|W|\psi\rangle=0$，別の $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|W|\psi\rangle=1$ となる可能性は，ケット $|\psi\rangle$ がヒルベルト空間において，方向を変えるにつれて，$\langle\psi|W|\psi\rangle$ が連続的に変わるというもっともな事実によって排除されることに，注意しておこう．（本書においては，この事実を精確にする方法を展開したり，これが真であることを示したりすることはしない．）

ここで，重要な問題が生じてくる．非可換なオブザーバブルに対するくっきりした値を同時にもつ状態の準備には限界があることを認めると，これは，これらの限界のもとでの状態においては，そのようなオブザーバブルの同時測定ができないことを意味するのだろうか．次のような状況を考えてみよう．時刻 t_1 に，Q（極大とする）の固有値 q に対応する固有ケットを準備したとしよう．たとえば，Q の理想的測定を行なって，測定結果が値 q を示す系のみを選別すればよい．したがって，初期状態は $|q\rangle$ である．さて，後の時刻 t_2 に，非可換（非両立）なオブザーバブル Q'（$|q\rangle$ はこれの固有ケットでないとする）を測定し，Q' に対する値 q' を得たとしよう．また，t_1 において準備された状態 $|q\rangle$ の時間発展が無視できるほど，時間間隔 t_2-t_1 は小さいとする．つまり，t における Q' 測定直前の状態は，実際上 $|q\rangle$ と見なしうるとする．そうすると，次のような議論ができるかもしれない．時刻 t_2 において，Q と Q' の測定結果が q と q' になるような同時測定を行なったと主張しうるような状況が，実際上は，確立されている，というのである．もちろん，t_2 において，現

実には Q' のみを測定したのである．しかし，反事実的に，t_2 において，Q' のかわりに Q を測定したならば，結果は q となったであろう．この意味において，われわれは，時刻 t_2 に，Q' の測定が現実に示したもの，すなわち値 q' を知っており，そして，Q を測定したならば示されたはずのもの，すなわち値 q をも知っていることになる，と主張できる．この議論は，Q を測定する実験装置と，Q' を測定する実験装置が両立しないという事実――ボーアなら相補性というが――を，うまく回避している．

ここで，重要な点に注目しておこう．同時測定による情報が主張されうる時点は，t_2 の直前である．これは，測定が後ろ向きの操作であるという事実と整合的である．もちろん，Q' の測定が理想的ならば，t_2 後の系の状態は $|q'\rangle$ になる．したがって，Q' 測定の結果として，Q 測定の結果を予測する能力を失ってしまったのである．

しかし，今度は，Q の固有ケットでもなく，Q' の固有ケットでもない初期状態 $|\psi\rangle$ から出発しよう．そのような状態においても，なんらかの意味において，Q と Q' を同時に測定できると主張しうるであろうか．この問いに肯定的に答えるために文献上考案されてきている考えは，本質的に，次のような工夫を含んでいる．固有値 $\{u_i\}$ をもつ縮退のない量 U を考えよう．U は，Q' と両立（すなわち可換）であり，状態 $|\psi\rangle$ において，

$$\mathrm{Prob}(q_i)_Q^{|\psi\rangle} = \mathrm{Prob}(u_i)_U^{|\psi\rangle} \tag{28}$$

なる性質をもつとする．したがって，U と Q は，状態 $|\psi\rangle$ において，確率的に一致している．さらに，固有値 u_i と q_i は等しいとしよう．

よって，(28) は

$$\mathrm{Prob}(q_i)_Q^{|\psi\rangle} = \mathrm{Prob}(q_i)_U^{|\psi\rangle} \tag{29}$$

で置き換えられる．そうすると，U を測定することは Q を測定することと同じである，と主張できる．なぜなら，固有値は等しく，固有値を得る確率も等しいからである（すべては，特定の状態 $|\psi\rangle$ に関したものであることを，覚えておこう）．

しかし，U は，仮定によって，Q' と両立するから，いまなすべきことは，U と Q' を測定し，得られた値 q, q' を記録することにつきる．そうすると，これらの 2 つの値は，状態 $|\psi\rangle$ における Q と Q' に要請された同時測定を構

成する．この考えにコメントをつける前に，典型的な例を与えよう．質量 m の粒子の位置 X と運動量 P を同時に測定するための，いわゆる「飛行時間」の方法である．

時刻 t_0 に，配位空間（簡単のために1次元とする）において原点に中心をもつ局在化した波束を準備したとしよう．不確定性関係によると，これは，運動量のある拡がりを含んでいる．t_0 において波動関数

$$\psi(x,\ t_0)=\sigma^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{30}$$

をもつ正規ガウス分布的波束を考えよう．X の値を，値 x の近傍に見出す確率密度は，

$$\begin{aligned}\overline{\text{Prob}}(x)_X^{|\psi\rangle}&=|\psi(x,\ t_0)|^2\\&=\sigma^{-1}\pi^{-1/2}e^{-x^2/\sigma^2}\end{aligned} \tag{31}$$

である．（記法 $\overline{\text{Prob}}$ を確率密度を表わすのに用いる．これは，X のように連続スペクトルをもつ作用素を扱うのに適した記法である．）

式（1.23）を用いると，運動量空間における波動関数は，

$$\begin{aligned}\psi(p,\ t_0)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}\psi(x,\ t_0)\mathrm{d}x\\&=\sigma^{1/2}\pi^{-1/4}e^{-p^2\sigma^2/2}\end{aligned} \tag{32}$$

で与えられ，

$$\begin{aligned}\overline{\text{Prob}}(p)_P^{|\psi\rangle}&=|\psi(p,\ \mathrm{t}_0)|^2\\&=\sigma\pi^{-1/2}e^{-p^2\sigma^2}\end{aligned} \tag{33}$$

である．ついでながら，状態 $|\psi_0\rangle$ に対して，$\Delta X=\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$ であり，$\Delta P=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ である．

よって，不確定さの積は

$$\Delta X\cdot\Delta P=\frac{1}{2}$$

であり，不確定性の不等式（26）は，等号で満足されている（式（32）において $\hbar=1$ と仮定したことを，思い出そう）．この理由のゆえに，ガウス的波束は，「最小不確定性」波束という性質をもっている．

さて，波束（30）の，ある後の時刻 t における時間発展を考えよう．これは，

自由粒子に対するハミルトニアン

$$H=p^2/2m \tag{34}$$

を用いて，式（1.25）から容易に計算でき，単純な結果

$$\psi(p,\ t)=e^{-ip^2/2m\cdot(t-t_0)}\cdot\psi(p,\ t_0) \tag{35}$$

を得る（ただし，式（1.25）において $\hbar=1$ とおいた）．

これは

$$\overline{\mathrm{Prob}}(p)_P^{|\psi_t\rangle}=\sigma\pi^{-1/2}e^{-p^2\sigma^2} \tag{36}$$

を示す，すなわち，P 測定に対する確率密度は，時間とともに変化しない．

さて，（1.23）における逆フーリエ変換によって，$\psi(x,\ t)$を計算すると，

$$\psi(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx}\psi(p,\ t_0)\mathrm{d}p$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(px-p^2/2m\cdot(t-t_0))}\cdot\sigma^{1/2}\pi^{-1/4}e^{-p^2\sigma^2/2}\mathrm{d}p \tag{37}$$

（37）の積分は，標準的な公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\zeta^2+2b\zeta}\mathrm{d}\zeta=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{b^2/a} \tag{38}$$

（ただし，$Re\ a>0$）を用いて，容易に評価できる．

結果は，

$$\psi(x,\ t)=\sigma^{1/2}\pi^{-1/4}\cdot\frac{1}{\left(\sigma^2+\frac{i(t-t_0)}{m}\right)^{1/2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\left(\sigma^2+\frac{i(t-t_0)}{m}\right)}}$$

よって，

$$\overline{\mathrm{Prob}}(x)_X^{|\psi_t\rangle}=\frac{\sigma\pi^{-1/2}}{\left(\sigma^4+\frac{(t-t_0)^2}{m^2}\right)^{1/2}}\cdot e^{-\frac{x^2\sigma^2}{\left(\sigma^4+\frac{(t-t_0)^2}{m^2}\right)}} \tag{39}$$

さて，オブザーバブル

$$U=\lim_{t\to\infty}\frac{mX}{t-t_0} \tag{40}$$

を考えよう．よって，

$$\overline{\mathrm{Prob}}(u)_{U}^{|\psi_\infty\rangle} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \overline{\mathrm{Prob}}(x)_{X}^{|\psi_\infty\rangle}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t - t_0}{m} \cdot \overline{\mathrm{Prob}}(x)_{X}^{|\psi_t\rangle}$$
$$= \sigma \pi^{-1/2} e^{-u^2 \sigma^2}$$

こうして，PとUは，$t \to \infty$の極限において，一致する確率密度をもち，よって，$t \to \infty$においてXとUの同時測定は，いまの議論のもとでの論証によれば，XとPの同時測定を構成するだろう．しかし，XとUの同時測定は，単に，Xを測定することのみにある．というのは，Uは，(40) を用いてXから計算されるにすぎないからである．しかし，これは，XとPの，真の同時測定を構成するだろうか．PとUの確率密度が，事実，一致するからといって，特定の場合に，Pを直接測定する――たとえば，磁場における偏向によって――ならば，Uに対して現実に見出したのと同じ値を見出したであろうと，主張できるわけではない．XとPの同時測定に対して，本当の意味での主張ができるのは，この反事実性を支持することが可能になるときなのである．

われわれが論じた最初の種類の例との対比に注意しよう．それもまた，反事実的言明を含んでいた．しかし，その言明は正当化されうるだろう．

作用素の等式 (40) が，原点の近傍で自由にされた粒子の運動量と，遠い未来のある時刻におけるその位置との間の古典的関係によく似ているという事実から，Uの測定は実際にPの測定であるという推論を導き出してはならない．

上の議論で極限$t \to \infty$をとる理由は，時刻t_0における粒子の位置の初期の不確定性が，時間とともに生じる波束の拡がりによって，いわば「浸潤される」ようにするためなのである．

不確定性関係のいわゆる**攪乱理論**について簡単なコメントをつけて，この節を終えることにしよう．不確定性関係に関するハイゼンベルクのもとの議論においては，有名なγ線顕微鏡による例が決定的な役割を果たしていた．物質粒子に対する不確定性関係を「演繹する」事実とは，次のようなものであった．粒子の位置を（顕微鏡の分解能をあげるために，きわめて短い波長の「光」（γ線）を用いて）精確に測定すればするほど，観測される粒子の運動量は，光線内の光子と物質粒子との間のコンプトン散乱によって，ますます，ランダ

ムに，見通しのきかない仕方で，**攪乱されて**しまう，というのであった.

実際には，この議論が示しているのは，古典論的に記述された粒子が，測定の状況において，量子的な存在，すなわち，量子力学の光子概念によって記述される光と相互作用するときに，量子力学の不確定性関係に「感染して」しまう，ということである.

このタイプの議論の簡単な例をとりあげよう．等しい質量の2つの粒子を考え，これらが，運動量 P_1 と P_2 で1次元的に運動し弾性衝突をして，運動量がそれぞれ P'_1 と P'_2 になったとしよう．粒子1は，不確定性関係

$$\Delta X_1 \cdot \Delta P_1 \sim \hbar/2 \tag{41}$$

を満たす量子的存在と仮定し，他方，粒子2は，はっきり定義された位置と運動量をもっているとする．また，衝突の際に，等式

$$P'_1 + P'_2 = P_1 + P_2 \tag{42}$$

$$P'^2_1 + P'^2_2 = P_1^2 + P_2^2 \tag{43}$$

を与える運動量とエネルギーの保存則を適用することにする．衝突が生じない場合というつまらない可能性を無視すると，(42) と (43) から，ただちに，

$$P'_2 = P_1 \tag{44}$$

が分かる．粒子2に対する状態準備と考えると，(44) から

$$\Delta P'_2 = \Delta P_1 \tag{45}$$

を得る.

粒子2が初めに静止している，すなわち，$P_2=0$ という特殊な場合を考えよう．そうすると，衝突が生じる時刻は，量

$$T = \frac{\Delta X_1 m}{P_1} \tag{46}$$

だけ，不確定である．このことから，衝突後の粒子2の位置の不確定さが，

$$\Delta X'_2 = T \cdot \frac{P'_2}{m} = \Delta X_1 \cdot \frac{m}{P_1} \cdot \frac{P'_2}{m} = \Delta X_1 \tag{47}$$

で与えられる．(45) と (47) から，

$$\Delta X'_2 \cdot \Delta P'_2 = \Delta X_1 \cdot \Delta P_1 \sim \hbar/2 \tag{48}$$

よって，量子的存在との衝突の結果として，粒子2の状態は，(48) で示されるように，不確定性関係に感染してしまう.

このような論証によって，われわれは何ができたのだろうか．それは，かなり不整合的に思える．衝突前に，粒子1は量子的であって粒子2は非量子的である，と仮定することから始めた．それから，衝突の過程を半古典的に記述し，粒子2が量子的であることを示して終わった．しかし，もう少し分析すると，粒子1が非量子的とされてしまったことが示されるだろう．これを見るには，式（42）と（43）から，

$$P'_1 = P_2 = 0 \tag{49}$$

も導かれることに，注意しよう．したがって，P_1 の初期の不確定さがどうであっても，粒子1の終わりの運動量は，確定値0に固定され，

$$\Delta P'_1 = 0 \tag{50}$$

さらに，

$$\Delta X'_1 = T\frac{P'_1}{m} = 0 \tag{51}$$

も得られる．（50）と（51）から

$$\Delta X'_1 \cdot P'_1 = 0 \tag{52}$$

実際，この種の論証によっては，不確定性関係は，証明することもでき，**かつ**反証することもできるのである（下の参考文献を見よ）．

不確定性関係を正しく理解するためには，この関係が，量子力学的系に対して作られうる種類の状態にとって本来的な制限を表わしているのであって，素朴な攪乱議論によって「説明」されたり「演繹」されたりしうるものではないことを，見なければならない．

注と参考文献

量子力学の哲学に対して参考すべき一般的な最もよい書物は，D'Espagnat（1976）とJammerによる記念碑的著作（1974）である．読者は，「解釈」という語が科学哲学において多くの異なった意味で用いられていることに，注意しておかなければならない．本書においても，本文で説明された用法を，首尾一貫して保つようにした．明確な議論については，ヤンマーの本を見よ．科学における説明という一般的なテーマについては，非常に多くの文献がある．説明と統一化の関係は，

Kitcher (1981) で展開されている．物理学におけるモデルの役割は，Redhead (1980) で論じられている．量子力学における隠れた変数は，Belinfante (1973) で包括的に扱われている．傾向性は，Popper (1957) によって確率の哲学に導入された．Popper (1982a), (1982b), (1983) をも見よ．傾向性を，実験装置ではなくて量子力学的系の属性と見なしうる，とする見解を擁護する議論については，Mellor (1971) の第4章を見よ．潜在量の考えは，Margenau (1954) で導入された．潜在性 (latency) に関する一般的な哲学的議論は，McKnight (1958) を見よ．

量子力学に対するボーアの哲学と相補性の観念について主要な第1次的文献は，3つの論文集，Bohr (1934), (1958), (1963) である．ボーアの著作に対して整合的な解釈を試みた最もよいのは，Scheibe (1973) の第1章である．Folse (1985) と Redhead (1987) をも見よ．古典物理学における測定の一般的理論について，最もよい導入は Ellis (1966) にある．理想的測定の図式と，それに結びついた射影公準は，von Neumann (1932) による．フォン・ノイマンは，形式的に理想的な測定がつねに可能であることを示した．実際問題としては，理想的測定は一般的でなくて例外的であるという事実は，Wigner (1952) の結果によって特に強調された．それは，理想的測定が可能となるのは，測定相互作用において，すべての加法的保存量と可換な量を測定するときのみである，という帰結であった．この点をさらに進めた議論については，Araki and Yanase (1960) と Yanase (1961) を見よ．混合に対する無知解釈は，van Fraassen (1972) と Park (1973) でさらに論じられている．測定問題がユニタリな時間発展の枠組みの中で解けないことのいくらか一般的な証明は，Fine (1970) が与えている．この証明や，文献上の他の解決不能証明に対する批判については，Brown (1986) を見よ．

不確定性関係と，それに関連したさまざまな思考実験は，Heisenberg (1930) の古典的著作で展開されている．量子力学の形式から不確定性関係を証明することについては，Robertson (1929) をも見よ．量子力学において分散のない状態が存在しないという本文で与えた証明は，von Neumann (1932) に従っている．

非可換オブザーバブルの同時測定は，Popper (1934), Popper (1967), Arthurs and Kelly (1965), She and Heffner (1966), Park and Margenau (1968), Fitchard (1979) によって論じられている．不確定性関係の攪乱理論に対する詳細な批判は，Brown and Redhead (1981) で与えられている．

量子力学の哲学における多くの古典的論文が，Wheeler and Zurek (1983) に再録されていて便利である．

ボーアの哲学に関する最近の研究には，Murdoch (1987) と Honner (1987) が

含まれる.

量子力学の哲学における広範な問題に関係した最新の重要な書物としては, Gibbins (1987) と Krips (1987) が含まれる.

3　アインシュタイン－ポドルスキー－ローゼンの不完全性論証

1935年，アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼン（EPR）は，量子力学の最小道具主義解釈が不完全であるという有名な論証を生みだした．この章において，われわれはこの論証の1つの変形を提出し，その意義についてコメントをつけよう．物理学の理論が完全であるための必要条件から始めよう．

完全性の必要条件（P）:
物理的実在のすべての要素は，物理理論の中に対応する表現（counterpart）をもたなければならない．

これは，EPR（1935）からのそのままの引用である．

この背後にある考えはきわめて単純である．物理理論が定式化される言語は，「実在の諸要素」間に推定される関係を示すすべての命題が，少なくともこの理論の言語の中で表現できるほどには，十分豊かでなければならない．

Pは十分条件ではない．十分条件は次のような要請をさらに含むことになろう．「実在の諸要素」に関するすべての命題は理論の公理的演繹構造に従って（偶然的初期条件の指定で補完して）真または偽が証明されなければならない，という要請である．この種の完全性は，数理論理学における有名なゲーデルの定理のテーマである．算術の重要な部分を含むすべての1階の理論（1階の理論とは，述語変数の量化を許さない理論である）は，上の付加的要請によると，実際に不完全である．条件Pはこのゲーデル的厳密さとは無関係である．それは，理論が定式化される言語の表現力にのみ関係している．ある理論がこの基準を満たさないことによって不完全であるとき，それは次のような場合とは整合的であることに注意しておかなければならない．つまり，理論が，現に存

在している実在の要素すべてに言及しそこなっているだけではなくて，事実存在していない実在の要素の存在を主張している，という場合である．

量子力学の不完全性証明に原理 P を適用するためには，「実在の要素」を同定するなんらかの方法をもっていなければならない．量子力学の不完全性を示すための EPR の考えは，単に，理論の中に対応する表現をもた**ない**実在の要素を証明することである．EPR は，次に，物理的実在の要素を同定するための十分条件を導入する．われわれは，EPR とは少し異なる形で条件を提出しよう（その相違については後にコメントをつける）．

実在の要素の十分条件（R）：

時刻 t における物理量の測定結果を，確実に，あるいは，とにかく確率 1 でもって，予測できるならば，時刻 t において物理量に対応する実在の要素が存在し，それは，予測された測定結果に等しい値をもっている．

実在性の基準 R は，確かに，すぐれて合理的に思える．それは，実際，**最善の説明に至る推論**の 1 変形に依存している．時刻 t において測定の予測がなぜ成功するのかに対する最善の説明は，時刻 t に実在のある要素が存在し，それが，まさしくその値をもち，問題の物理理論に従って予測され，そして，それが測定によってそのとき単に発見される，という説明である．対偶的に議論すると，時刻 t に実在の要素が存在しないならば，時刻 t の測定結果について成功する予測ができるなどとわれわれは期待すべきでないであろう．なぜなら，予測可能性は実在の諸要素の振舞いの基底にある規則性の結果として生じるとしか期待できないからである．次のことに注意しよう．われわれは，実在のすべての要素が予測可能な値をもつ——それは決定主義のテーゼである——と要求しているのではない．ただ，予測可能ならばこの可能性を説明する実在の要素が存在しなければならない，と主張しているだけである．

私がテーブルを見て，それからくるりと背を向けて次の予測をすると想像しよう．外的な干渉はないと仮定したうえで，私が再び向きをかえるならば再びテーブルを見るであろう，という予測をすると想像しよう．私が再びテーブルを見ると予測できるのであるから，R に従って，私が再び見る瞬間にテーブルに対応する実在の要素が存在すると推論してもよい．この場合，実在の要素は，

予測が行なわれる時刻 t_0 にも，予測が効力をもつ時刻 t にも存在している．しかし，実在の要素が時刻 t_0 に存在することを示すためには，この実在の要素は t_0 と t の間のある時刻に急に存在させられたりはしないという推論を許すような，別の原理が要請される．テーブルの場合，これは，私が背を向けている間にテーブルの状態に対する外的な干渉はないという仮定によって与えられている．

別の例をとろう．t_0 に，次の予測をすると想像しよう．つまり，後の時刻 t' に，ある機械仕掛けによって池に石が投げ込まれ，したがって，さらに後の時刻 t には小波が岸を打つだろう，という予測を t_0 に行なうのである．そうすると，R によって，時刻 t には実際に小波が存在すると推論できる．しかし，小波は，石が投げ込まれた時刻 t' に存在し始めたのであり，もとの予測が行なわれた時刻 t_0 には存在していなかったのである．

さて，量子力学の状況にもどろう．2.1 節ですでに導入した記法を採用する．$[Q]$ によって，オブザーバブル Q に対応する実在の要素の値を表わす．ときには，実在の要素自身を表わすのにも $[Q]$ を用いる．意味は，文脈からつねに明らかだろう．第 2 章で導入した 3 つの見解を考察しよう．見解 A によると，$[Q]$ は，すべての時刻に，すべての状態において，すべてのオブザーバブルに対して存在する．しかし，見解 B と C は，Q の非固有状態において $[Q]$ は存在しないと主張する．

$[Q]$ は，系が個々のどの量子力学的状態にあるかに部分的に依存するから，Q が，個々の場合に状態 $|\phi\rangle$ において所有する値を指示するためには，記法 $[Q]^{|\phi\rangle}$ を用いる．すると，R を用いて次の結果が得られる．

固有ベクトルの規則：　$$[Q]^{|q_i\rangle}=q_i \tag{1}$$

ただし，$|q_i\rangle$ は，通常のように，固有値 q_i に属する Q の i 番目の固有ケットを表わす．

固有ベクトルの規則は，量子力学のどの解釈をとっても，R を認めるならば，Q の固有状態において Q に対応する実在の要素がつねに存在し，対応する固有値に等しい値をもっていることを示している．（これは式（2.6）の下で述べた注意，つまり，混合の成分状態は，関係するオブザーバブルの所有された，あるいはくっきりした値を示すという注意，を正当化するのに役立つ．）

2つのスピン$\frac{1}{2}$粒子からなる量子力学系が全スピンの1重項状態にあり，さらに，2つの系の空間的波動関数が意味のある重なりをしないほど，空間的に遠く分離している場合を考えよう．このような状態は，たとえば，2つの陽子の全スピン1重項（反対称）状態によって進むことがよく知られている低エネルギーp－p散乱において生じうる（低エネルギー散乱を支配するS－波の空間波動関数は粒子の交換のもとで対称であるから，パウリの原理は状態ベクトルのスピン部分が反対称であることを要求する）．式（1.102）から，このスピン状態が

$$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha(1)\rangle|\beta(2)\rangle-|\beta(1)\rangle|\alpha(2)\rangle) \tag{2}$$

で与えられることが分かる．ただし，

$$\left.\begin{aligned} |\alpha(1)\rangle&=|\sigma_{1z}=+1\rangle\\ |\beta(1)\rangle&=|\sigma_{1z}=-1\rangle\\ |\alpha(2)\rangle&=|\sigma_{2z}=+1\rangle\\ |\beta(2)\rangle&=|\sigma_{2z}=-1\rangle \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

状態$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$に対して，$\sigma_{1z}$の測定結果が$-1$と与えられたときに$\sigma_{2z}$の測定結果$+1$を見出す条件確率を，容易に計算することができる．これは，

$$\begin{aligned}\text{Prob}(\sigma_{2z}=1/\sigma_{1z}=-1)&\underset{Df}{=}\frac{\text{Prob}(+1,\ -1)^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\sigma_{2z},\ \sigma_{1z}}}{\text{Prob}(-1)^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\sigma_{1z}}}\\ &=\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{2}=1\end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる．同様に，

$$\text{Prob}(\sigma_{2z}=-1/\sigma_{1z}=+1)=1 \tag{5}$$

式（4）と（5）は，$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$に組み込まれた鏡像相関としばしば称されるものを表わしている．σ_{1z}を測定することによって，それに続くσ_{2z}の測定がσ_{1z}の測定結果と反対の値を示すことを予測することができる．時刻をいくつか加えよう．t_1にσ_{1z}を測定する．そうすると，（時刻t_1にσ_{1z}の測定をする以外には，結合系に対する干渉はないと仮定して）任意の時刻$t_2>t_1$に対するσ_{2z}の測定結果を予測することができる．したがって，Rを用いて，任意の時刻$t_2>t_1$に対して［σ_{2z}］が存在すると推論できる．具体的にするために，時刻t_1にσ_{1z}に

対して理想的測定を行ない，値+1を得たとしよう．この測定後の結合系の状態は，測定結果に従って，$|\Psi\rangle=|\alpha(1)\rangle|\beta(2)\rangle$ となる．これは，σ_{2z} の固有値 -1 の固有状態である．これが，任意の時刻 $t_2>t_1$ における σ_{2z} の測定結果を -1 と予測でき，よって R から，値 -1 をもつ $[\sigma_{2z}]$ の存在を推論できるという事実に対応しているのである．さて，結合系の状態が $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ のとき，$[\sigma_{2z}]$ の存在を時刻 $t_3<t_1$ に射影できるという議論をしたい．そうするために，われわれは，局所性原理 L をもちだす．

局所性原理（L）：

1つの系に属する実在の諸要素は，他の系に対して「遠く隔たって」(at a distance) なされた測定によって，影響されえない．

「遠く隔たって」という言い回しは，2つの意味に理解することができる．それらを，**ベル局所性**と**アインシュタイン局所性**として区別しよう．ベル局所性に対して，「遠く隔たって」は現在の物理理論によって認められた因果的影響のないことを意味する．アインシュタイン局所性に対しては，「遠く隔たって」は，1つの系に属する実在の要素が存在する時空的位置と他の系に対する測定が生じる時空的位置が空間的に分離していることを意味する．

仮に，特殊相対論（SR）がアインシュタイン局所性を含意していると受けとられるならば，アインシュタイン局所性の形においてわれわれが主張するのは，知られている物理的な因果的影響が作用していないということだけではなくて，特殊相対論の制限と整合的ないかなる可能な因果的影響も実在の要素に変化をもたらすような効果をもちえないだろうということでもある．

さて，L を時刻 t_1 における実在の要素 $[\sigma_{2z}]$ に適用しよう．これは，その実在の要素のいかなる変化も σ_{1z} の測定結果として影響されることはありえないことを示す．言いかえると，L によってわれわれは，（いまの例では -1 をもつ）$[\sigma_{2z}]$ の存在を時刻 $t_3<t_1$ に遡って射影することができるのである．しかし，時刻 t_3 において系の状態は $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ であり，これは確かに σ_{2z} の（もちろん σ_{1z} の）固有状態でないから，われわれが証明したことは σ_{2z} の非固有状態において $[\sigma_{2z}]$ が存在するということである．よって，われわれが証明したことは，Q と $|\psi\rangle$ の特殊な選択に対して，$|\psi\rangle$ が Q の固有状態でないとき

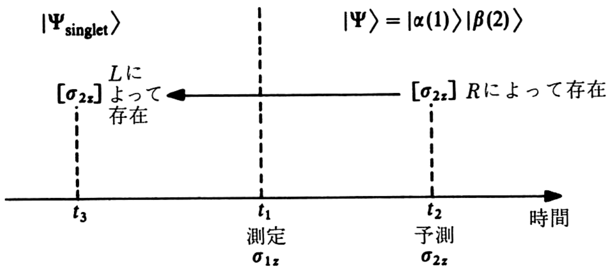


図 8　EPR の論証の図解．σ_{1z} が時刻 t_1 に測定され，これは後の時刻 t_2 における σ_{2z} の予測に用いられる．**実在性原理** R によると，実在の要素［σ_{2z}］が t_2 に存在すると主張され，次に，**局所性原理** L により，t_1 より前の時刻 t_3 に写しかえされる．t_1 における測定前の合成系の状態は $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ であり，測定後は $|\Psi\rangle=|\alpha(1)\rangle|\beta(2)\rangle$ である．

でも，$[Q]^{|\psi\rangle}$ が存在するということである．そして，いまや P を採用して，量子力学の最小道具主義解釈が不完全であると結論できる．なぜならば，Q の非固有状態において，その解釈のもとでは［Q］に言及するものがないからである――実際，B や C のような量子力学の解釈では，そのような状態において［Q］はまったく存在しない．

われわれが与えた議論は，図 8 において図式的に，描かれている．

EPR 論証を

$$F \wedge L \rightarrow \text{不完全性} \tag{6}$$

の形にまとめることができる．ただし，F は，最小道具主義解釈をもった量子力学の形式を表わし，論理記号 '∧' を連言として用いる．この論証においては，F の小さな，しかし，きわめて重要な部分のみが実際に用いられたにすぎないことに注意しておこう．すなわち，上に述べたような仕方で厳密に鏡像相関をもつ 2 つの系の結合のヒルベルト空間に対して，因子分解不能状態が存在することである．

(6) は

$$F \rightarrow \sim(L) \vee \text{不完全性} \tag{7}$$

と，書きなおすことができる．ただし，'∼' は否定を表わし，'∨' は選言を表わす．

(7) を**アインシュタインのジレンマ**と呼ぼう．それが述べていることはこう

である．量子力学の形式Fを，純粋に観察的な道具的なレベルで正しいと受け入れるならば，局所性原理Lをあきらめるか，Fの不完全性を認めるかのどちらかでなければならないということである．アインシュタインと同じくわれわれもLをあきらめるつもりがないならば，(7) はFの不完全性に対する論証を構成する．これが，実際，EPR 論文の結論である．他方，Fが完全であると仮定するならば，(7) は，σ_{1z}の測定が生じたその時刻t_1において実在の要素［σ_{2z}］が存在するようになるという意味での非局所性に対する論証を構成する．σ_{1z}の測定を構成する事象と［σ_{2z}］が存在させられることとは，$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$を2粒子の適切なスピン状態とする基準枠に相対的に同時刻であり，その時にはこれらの事象が空間的に分離されているから，Lはアインシュタインの意味において破られている．非局所性に対するこのような議論の仕方を，EPR パラドクスと呼ぼう．これがパラドクスであるという意味は，厳密な論理的意味ではなくて，直観に反する結論，すなわちアインシュタイン局所性に対する違反を含んでいるという意味である．

これまでわれわれは，EPR 論証をF, つまり量子力学の形式の最小道具主義解釈に適用されるものとして論じてきた．今度は，まず，第2章（52頁以下を見よ）でA, B, Cと名づけた解釈でFを補ったとき，その論証がどのようになるかを考えてみよう．これらの解釈はすべて，実在の完全な記述を提供することを意図している．したがって，もし，これらの解釈によって存在が**否定された**実在の要素の存在が EPR 論証によって証明され，したがって，その解釈の**不完全性**を示す実在の要素が証明されるならば，その解釈は実際に偽であると結論できる．

見解Aによると，すべての時刻において［σ_{2z}］が存在すると主張される．よって，状態$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$における［$\sigma_{2z}$］の存在を示し$F$の不完全性を示すために，EPR 論証は必要ないだろう．

見解Bの場合には，局所性原理Lによって可能性が否定される効果の種類について，もう少しはっきりできる．実際，Lを次の定式化で置き換えよう．

LOC$_1$：オブザーバブルのぼやけた値を，「遠く隔たって」なされた測定によって，くっきりした値に変えることはできない．

そうすると，EPR 論証から，帰結

$$B \wedge \mathrm{LOC_1} \rightarrow \text{不完全性} \tag{8}$$

$$\rightarrow \sim(B) \tag{9}$$

が得られる．(9) から

$$B \rightarrow \sim(\mathrm{LOC_1}) \tag{10}$$

が結論される．すなわち，見解 B を EPR 論証と結び付けると，アインシュタインの意味で $\mathrm{LOC_1}$ が破られることの証明が得られる．別の見方をすると，(10) を対偶的に読んで，$\mathrm{LOC_1}$ を仮定すると見解 B が反駁されることを示している．

さて，見解 C に向かおう．ここでは，L をより適切に詳しくすると，

$\mathrm{LOC_2}$： それまで定義されていなかった値を，「遠く隔たって」なされた測定によって，定義することはできない．

すると，

$$C \wedge \mathrm{LOC_2} \rightarrow \text{不完全性} \tag{11}$$

$$\rightarrow \sim(C) \tag{12}$$

を得る．よって，

$$C \rightarrow \sim(\mathrm{LOC_2}) \tag{13}$$

さて，EPR 論証に対するボーアの反応と，不完全性の非難に対する彼の拒絶は，本質的には次の主張になる．$\mathrm{LOC_2}$ は特殊相対論に違反して送達される物理的効果がなくても破られうる，という主張である．$\mathrm{LOC_2}$ をこのように否定することは，(13) の対偶を用いて C が偽であるとを論証することを妨げる．そしてまた，(11) から，不完全性の論証も崩壊することを意味する．なぜなら，論証の前提の 1 つ $\mathrm{LOC_2}$ に同意が与えられないからである．明らかに，EPR 論証を阻止するこの作戦は，2.3 節ですでに論じたボーアの相補性哲学と結び付いた定義可能性基準をわれわれが受け入れるかどうかに依存する．

上に提出した論証ともとの EPR 論文との相違について，簡単にコメントしておきたい．

1. 実在性基準 R は次のように定式化されている．これを R' と呼ぶ．

R'： いかなる仕方においても系を撹乱することなしに，確実に（すなわち，1

に等しい確率で）物理量の値を予測することができるならば，その物理量に対応する物理的実在の要素が存在する．

R' は，実在の要素が存在すると推論されている時刻について明確でないし，さらに，局所性あるいは非攪乱の原理と実在性基準とを混ぜ合わせてしまっている．このことが，不完全性に対する論証の論理的構造をいくらか曖昧にしている．

2．EPR は，非可換オブザーバブルに対応する実在の要素の同時存在を論証している．したがって，論証のスピンによる言い換えを続けると，状態 $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ における［σ_{2z}］の存在を論証したのであるから，状態 $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ が，式（1．103）のように，σ_{1x} と σ_{2x} の固有ケットでも展開できるという事実を活用することができるだろう．2 粒子に対するパウリのスピン・オブザーバブルの X 成分の鏡像相関によると，今度は，状態 $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ における［σ_{2x}］の存在を推論することができる．したがって，非可換なオブザーバブル σ_{2z} と σ_{2x} は，それらに結び付けられる実在要素を同じ量子力学的状態においてもっていることになる．これは完全に正しい．そして確かに，量子力学の最小道具主義解釈 F の不完全性をわれわれは推論することができる．EPR 論証を論じる際には，σ_{1z} を測定するかまたは σ_{1x} を測定するかという実験者が直面する選択について多くのことが言われてきている．状態 $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に組み込まれた鏡像相関によって［σ_{2z}］も［σ_{2x}］も予測可能であるということは正しいけれども，それらを同時に予測することはできない．なぜなら，σ_{1z} と σ_{1x} は非両立なオブザーバブルであって，同じ実験において測定することができないからである．しかしながら，不完全性に対する論証が，σ_{1z} を測定するか σ_{1x} を測定するかという二者択一的可能性に関する考察なしに進められていることは，明らかにしておかなければならない．われわれが示してきたように，不完全性を確立するためには，1 つの成分，たとえば，σ_{1z} を考察するだけで十分なのである．

3．もとの論文で，EPR は，スピンで言い換えた論証を用いてはいない．この言い換えはボームによる（本章末の注と参考文献を見よ）．かわりに，彼らは，1 次元的運動をする 2 粒子に対する位置と運動量の測定を考察している．彼らは，状態

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle|-p\rangle e^{-ilp}\mathrm{d}p \tag{14}$$

を考える．ここに，テンソル積において第1成分は粒子1に言及し，第2成分は粒子2に言及するという約束を用いる．よって，(14) は，2つの粒子の運動量 P_1 と P_2 に対するそれぞれの固有値 p と $-p$ に結び付いた同時固有ケットの重ね合わせである．したがって，$|\Psi\rangle$ 自身は，固有値ゼロをもつ P_1+P_2 の固有ケットである．しかし，(14) は，Q_1-Q_2 の固有ケットでもある．ただし，Q_1 と Q_2 は2つの粒子の位置である．

展開によって，ただちに，

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q|p\rangle|q\rangle\mathrm{d}q$$

$$|-p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q'|-p\rangle|q'\rangle\mathrm{d}q'$$

が得られ，

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{iqp}$$

と

$$\langle q'|-p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-iq'p}$$

を思い出すと，

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\,\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p\,e^{i(q-q'-l)p}|q\rangle|q'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\delta(q-q'-l)|q\rangle|q'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|q\rangle|q-l\rangle\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{15}$$

が得られる．(15) から，

$$(Q_1-Q_2)|\Psi\rangle = l|\Psi\rangle$$

これは，$|\Psi\rangle$ が固有値 l をもつ Q_1-Q_2 の固有ケットであることを示している．

明らかに，(14) または (15) で表わされた状態 $|\Psi\rangle$ は，スピンの例に類

似の相関的特徴を組み込んでいる．よって，(14) は，P_1 の測定から P_2 の測定結果，すなわち，P_1 の測定結果にマイナスをつけた値を予測できることを示しており，同様に (15) は，Q_1 の測定から，Q_2 の測定結果が一定の距離 l だけ動かした値であることを示している．こうして，EPR は，状態 $|\Psi\rangle$ において $[P_2]$ と $[Q_2]$ は同時に存在すると結論することができ，よって，F の不完全性を推論できたのである．

状態 $|\Psi\rangle$ がどのようにしたら準備できるのかを考えておくのは教訓的である．2 本の平行なスリットをもった薄くて剛い隔壁を考える．これらのスリットはスリット間の距離に比べて非常に細いとする．スリットの幅に比べて大きな波束で定義された 1 つの粒子が，他の粒子とは独立に，各スリットを通っていくとする．各粒子の初期の運動量は，ある平均的な値の近くでくっきりと定義されており，この値は入射粒子の運動を隔壁に垂直な方向に指定するような値になっている，とする．この隔壁は弱いバネで固い枠から吊下げられており，この枠は空間的枠組をなす台にしっかり固定されている，とする．これらの状況において，空間的基準枠に対する隔壁の精確な位置の制御を断念するならば，われわれは，2 つの粒子と隔壁との間でやりとりされる横方向の運動量を「眺める」立場にいることになる．もし，隔壁に与える運動量がゼロで 2 つのスリットを通過した粒子対を選ぶとし，Q_1，P_1 と Q_2，P_2 が 2 粒子の横方向の位置と運動量を表わすならば，横方向の運動に関してそのような粒子対を記述する状態ベクトルは，われわれが論じてきた EPR 状態 $|\Psi\rangle$ に事実上他ならないであろう．

2 点注意しておこう．第 1 に，Q_1 の測定と Q_2 の測定の間の強い相関は，粒子がスリットを通過した直後にのみ正しいだろう．$|\Psi\rangle$ の時間発展は，細いスリットの後の通常の回折効果のために，Q_1 と Q_2 の測定結果の間の相関が次第に失われていくという結果になるだろう．第 2 に，$|\Psi\rangle$ は Q_1-Q_2 がくっきりした値 l をもつ状態であるが，しかし，Q_1 と Q_2 それぞれはぼやけた値をもつ状態である．それらは，われわれが考えている極限の状況では，$-\infty$ から $+\infty$ までわたっている．シュレーディンガー時間発展の観点からは，EPR 状態は，無限の線状粒子源として振舞う．それは，粒子源の異なる点に発するシュレーディンガー波の間で干渉効果が生じないという意味で，「インコヒーレ

ント」である．

注と参考文献

もとのEPR論証は，Einstein，Podolsky，and Rosen（1935）で与えられた．ボーアの反応は，Bohr（1935）に見られる．Bohm（1951）は，論証をスピンによる形で提出している．局所性原理LOC_1とLOC_2は，Redhead（1983）で導入された．EPR状態を作るための思考実験は，Bohr（1935）で与えられている．それ以上の議論については，Redhead（1981）を見よ．

4　非局所性とベルの不等式

4.1　ベルの不等式

前章において，われわれはアインシュタインのジレンマを提出した．それは，量子力学の最小道具主義解釈 F から非局所性または F の不完全性が導かれる，ということであった．われわれが見てきたように，アインシュタインは，このジレンマの不完全性の角（つの）を選んでこう結論した．とにかく，ある状態においては，この状態を固有状態としていないオブザーバブルが，それにもかかわらず，くっきりした値を所有している，と．これは，第2章で見解 A と呼んだ考え方のスタイルで量子力学を「完全にする」プログラムを示唆したのである．思い起こすだろうが，見解 A は，すべてのオブザーバブルがすべての状態においてくっきりした値をもつ，と述べている．しかし，1964年に出版された有名な論文でベルは次のことを示した．つまり，見解 A をそれに適した局所性原理——LOC_3 と呼ぼう——と結合すると，EPR の論証に対するボームのスピンの例を少し拡張したときに，測定可能な相関係数間のある不等式が導かれることを示したのである．そして，この不等式は，今ではベルの不等式と呼ばれるようになっているが，ある範囲の条件のもとで F 自身の予測と一致しないことが分かったのである．

ここから2つの問題が生じる．第1に，論理的問題がある．解釈 F を補って見解 A の完全な解釈にすることは，ベルの不等式を導くのに用いた局所性原理 LOC_3 に違反しないかぎり論理的に不可能だ，ということである．言い換えると，アインシュタインのジレンマにおける不完全性の角（つの）に従っても，われわれは〔もう1つの角（つの）の〕非局所性を逃れることができず，LOC_3 に対する違反という結末になってしまった，ということである．第2の問題は，ベルが想定した特定の状況設定に対する F の予測が現実に実験と一致するか，という問

題である．ベルの不等式は実験によって破られないかもしれない．そうすると，見解 A と LOC_3 を維持することができるであろう．しかし，間違っているのは F そのものだ，ということになる．

さて，これらひと組の観念をより詳しく展開することにしよう．第1に，見解 A に適した局所性原理 LOC_3 を述べよう．

LOC_3：

オブザーバブルのくっきりした値を，装置の遠くの部分の設定を変えることによって，他のくっきりした値に変えることはできない．

LOC_3 で補った見解 A からベルの不等式がどのように導かれるかを見ることにしよう．ベルが与えたもとの論文では，2.1節で述べたような見解 A の隠れた変数による形が採用されていた．しかし，そこで注意したように，これには，すべての状態においてすべてのオブザーバブルのくっきりした値が存在するということ以上の付加的な仮定が含まれていた．とくに，隠れた変数による方法を採ると，非両立的オブザーバブルに対する結合確率の存在を認めることになる．よって，この「隠れた」仮定がベルの不等式の導かれる原因であって，局所性の仮定は温存されるのかもしれない．したがって，隠れた変数の仕組みを利用せずに，そして非両立的オブザーバブルに対する結合確率分布を仮定せずに，ベルの不等式の証明を与えておくことは重要である．われわれはこれを与えることにしよう．

再び，EPR の論証に対するボームの形を考えよう．2つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子が，粒子源 S から1重項スピン状態で逆方向に放出され，任意に指定された方向での粒子のスピン射影を測定できる2つのスピン・メーターに向かうとする．スピン・メーターそれぞれに，2つの方向あるいは「設定（settings）」を考えよう．すなわち，A に $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$，B に $\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}'$ である．粒子源から放出された n 番目の粒子対(つい)に対して，A メーターが $\mathbf{a}$ に平行に設定されたとき，$\hbar/2$ を単位として方向 $\mathbf{a}$ に射影される A 粒子（すなわち，スピン・メーター A に来る粒子）のスピン成分を a_n で表わそう．a'_n，b_n，b'_n の記法に対しても同様である．もちろん，量子力学の指示によると，スピン・メーターによる測定が単にこれらの数値を示すかぎりそれはつねに±1 のどれかである．

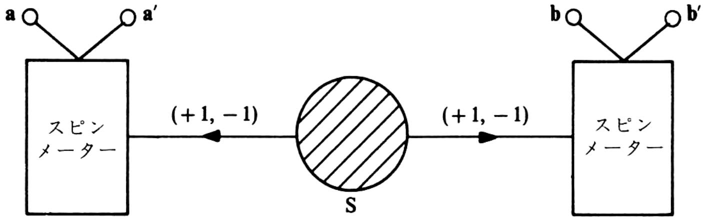


図 9　ベルの実験の図解．S は2つのスピン½粒子の粒子源であり，これらの粒子は，任意の方向において，$\hbar/2$ を単位として，値±1の可能なスピン成分をもっている．A と B は2つのスピン・メーターであり，A メーターについては，**a** または **a′** に平行なスピン成分を，B メーターについては，**b** または **b′** に平行な成分を測定するように，調整できるようになっている．

状況は図9に描かれている．ただし，各スピン・メーターの2つの設定は，それぞれのメーターにつけられた「つまみ」あるいはレバーの，**a**，**a′**，**b**，**b′** と書かれた可能な位置によって示されている．さて，式

$$\gamma_n = a_n b_n + a_n b'_n + a'_n b_n - a'_n b'_n \tag{1}$$

を作ろう．明らかに γ_n は，たかだか−4と4の間（両端を含んで）にしかありえない整数である．ここでの仕掛けは，第4項の値（マイナスをつけて）が初めの3つの項の積になっていることにある．つまり

$$a_n b_n \cdot a_n b'_n \cdot a'_n b_n = a_n^2 \cdot b_n^2 \cdot a'_n b'_n = a'_n b'_n$$

少し考えれば，この事実から γ_n の値が±2に限られることが分かる．

これは次の簡単な論証で確かめられる．

$$\gamma_n = a_n(b_n + b'_n) + a'_n(b_n - b'_n) \tag{2}$$

と書こう．さて，b_n と b'_n は同符号または異符号でなければならない．どちらの場合も (2) の1つの項のみがゼロでない．その値は，明らかに±2である．

さて，N 個の事象を考え，

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n b_n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n b'_n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a'_n b_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a'_n b'_n\right|$$

を作ろう．しかし，すべての n に対して $\gamma_n = \pm 2$ であるから，この式は2以下である．

相関係数を定義しよう．

$$\left.\begin{aligned} c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n \\ c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}') &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n b'_n \\ c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a'_n b_n \\ c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}') &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a'_n b'_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

そうすると，$N\to\infty$の極限において，

$$|c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})+c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}')+c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})-c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}')|\leqq 2 \tag{4}$$

と結論できる．不等式（4）は，いわゆるベルの不等式の１つの形である．

平均値 $\overline{a_n}$，$\overline{b_n}$，$\overline{a'_n}$，$\overline{b'_n}$ は $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に対してすべてゼロであり，分散 $\overline{(a_n-\overline{a})^2}$，等はすべて１であることを思い出すと，(3) で与えられた相関係数の定義は，統計学において与えられる普通の定義に一致する．そこでは，統計的変数 a_n，b_n の間の相関係数は，一般に，

$$\frac{\overline{(a_n-\overline{a}_n)(b_n-\overline{b}_n)}}{(\overline{(a_n-\overline{a}_n)^2}\cdot\overline{(b_n-\overline{b}_n)^2})^{1/2}}$$

で与えられる．ただし，平均値あるいは期待値を表わすのに￣（バー）を用いた．

さて，方向 $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ を適当に選ぶと，相関係数に関する量子力学の予測がベルの不等式を破ることが容易に示される．実際，われわれは必要な計算を第１章でしておいた．よって，式（1.105）からただちに，

$$c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=-\cos\theta_{ab} \tag{5}$$

ただし，θ_{ab} は，方向 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の角である．同様に，

$$\left.\begin{aligned} c(\mathbf{a},\mathbf{b}') &= -\cos\theta_{\mathrm{ab}'} \\ c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}) &= -\cos\theta_{a'b} \\ c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}') &= -\cos\theta_{a'b'} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

方向 $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ を共面〔ベクトルとして始点を共有するように平行移動させたときに，１平面内にある〕に選び，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を平行にとり，図 10 に示されるよ

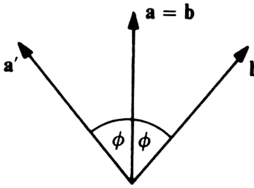


図 10　ベルの不等式の破れを説明するために選んだ特殊な方向.

うに $\theta_{ab'}=\theta_{a'b}=\phi$，よって $\theta_{a'b'}=2\phi$ とする．この特殊な方向の選択に対して，

$$F(\phi)\underset{Df}{=}|1+2\cos\phi-\cos2\phi|\leqq2 \qquad (7)$$

ならば，量子力学の予測はベルの不等式を満足する．

図 11 において，$0°\leqq\phi\leqq180°$ の範囲で ϕ の関数として $F(\phi)$ を描いた．0° から 90° の ϕ の値すべてに対して，ベルの不等式は破られている．$F(\phi)$ の最大値が 5/2 であり，$\phi=60°$ に対して得られることは，容易に確かめられる．

古典物理学における相関の例を考えておくのは教訓的である．そこでは，もちろんベルの不等式は満たされる．共通の車軸の周りに角運動量 **J** と −**J** で回転する 2 つの車輪を考えよう．よって，系の全角運動量は量子力学のスピンの例で論じてきたのとちょうど同じようにゼロである．さて，2 つの車輪が離れて飛んでいくようにしよう．第 1 の車輪に対しては任意の方向 **a** に関する角運動量成分の符号を測定し，第 2 の車輪に対しては **b** に関する成分の符号を測定するとしよう．車軸の向きが空間のあらゆる方向に同じように分布している車輪－車軸系の集団を考えよう．a_n と b_n を n 番目の系の角運動量成分の符号とする．よって，量子力学の場合とちょうど同じように，a_n と b_n はつねに ±1

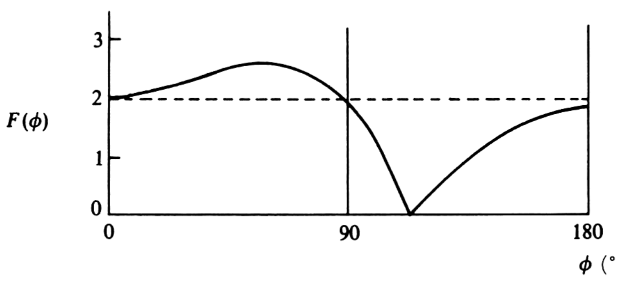


図 11　角 ϕ が 0° から 180° まで変化するときの，式 (7) の $F(\phi)$ のグラフ．ベルの限界は $F=2$ で与えられる．不等式は，0° から 90° の間の ϕ のすべての値に対して破れている．

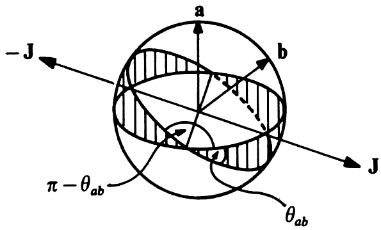


図 12　角運動量 J と −J で互いに飛び去っていく 2 つの車輪に対するベルの不等式の古典的例.

である.

単位球面上に大円を描き，それらのなす平面がそれぞれ **a** と **b** に垂直になるようにする．そうすると球面は，図 12 で示すように，球面角 θ_{ab}，$\pi-\theta_{ab}$，θ_{ab}，$\pi-\theta_{ab}$ の 4 つの円弧 2 角形に分割される．もし，車軸が，図で示すように，球面角 θ_{ab} の影をつけた 2 つの円弧 2 角形の領域で球を貫くならば，明らかに a_nb_n は $+1$ となる．他方，車軸が球面角 $\pi-\theta_{ab}$ の影のついていない 2 つの円弧 2 角形の領域で球を貫くならば，a_nb_n は -1 になる．車軸の向きがあらゆる方向に同じように分布していることから，単純な結果

$$c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=\overline{a_nb_n}=\frac{2\theta_{ab}(+1)+2(\pi-\theta_{ab})(-1)}{2\pi}$$

$$=-1+\frac{2\theta_{ab}}{\pi} \tag{8}$$

が得られる．図 10 に示したような 4 つの方向 **a**, **a′**, **b**, **b′** を選ぶと，ベルの不等式の左辺は 2 に等しくなることが容易に確かめられる．したがって，この特殊な例においてベルの不等式はぎりぎり満たされているが，もちろん破られてはいない.

量子力学においてベルの不等式が破られる理由は，相関係数の式 (5) と (6) で示される角度依存性による．(5) と (8) を比較して，小さな θ_{ab} に対しては，量子力学の予測が古典的例よりもはるかに強く完全な反相関に「しがみついて」いる仕方に注意しよう．(5) より

$$c(\mathbf{a},\mathbf{b})=-\cos\theta_{ab}\simeq-1+\frac{1}{2}\theta_{ab}^2\ldots$$

となり，よって，非相関 (de-correlation) は，(8) に示したような θ_{ab} にで

はなくて，θ_{ab}^2 に比例しているのである．

ベルの不等式の証明に入り込んでいる本質的な要素は，LOC_3 の仮定である．たとえば，われわれは，b_n を測定しようと b'_n を測定しようと a_n の値は同一であると仮定した．また，スピン・メーター B のつまみの設定を **b** から **b′** に変えても a_n の値には影響せず，この値は方向 **a** につまみを設定したスピン・メーター A によって「発見される」と仮定した．これは，γ_n に対する式（1）の中に 2 度現われる a_n が同一の値をもつことを意味する．a'_n，b_n，b'_n に対しても同様である．これは $\gamma_n = \pm 2$ の証明にとって決定的である．a_n の定義は，**a** に平行な A 粒子のスピン射影がスピン・メーター A の設定に依存するのを認めていることに注意しよう．

われわれが提出した形では，ベルの不等式をテストするのに 4 つの別々の相関実験が含まれている．これらは，**a** と **b**，**a** と **b′**，**a′** と **b**，**a′** と **b′** をそれぞれ組み合わせて設定することを含んでいる．われわれは，どの実験においてもつまみはただ 1 つの設定しかできないという意味で，これら 4 つの実験は相互に排他的であると見なしている．よって，ここでわれわれは，非両立的オブザーバブルを同時に**測定する**ことができないという強い方針を採っているのである．にもかかわらず，われわれは，a_n，b_n，a'_n，b'_n すべてが，a_n と b_n，a_n と b'_n，a'_n と b_n，a'_n と b'_n の対としては，同時に測定できる確定した**値**をもっていると仮定している．

a_n，a'_n，b_n，b'_n に対する値の表（図 13 を見よ）を考えて，どのような状況に

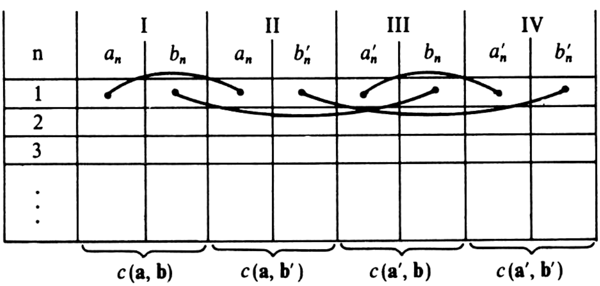


図 13　ベルの実験における 4 つの相関実験 I, II, III, IV に対する値の図式的な表．調和条件は，異なる実験における同一のスピン成分の値を結ぶ「線」で示される．

なっているのかを説明しよう．この表では，4つの相関実験はI，II，III，IVとして区別されている．4つの値のそれぞれは，表の各行に2度ずつ生じている．というのは，各値は2つの相関実験に現われるからである．2度ずつ同一の数値が現われる（図13では「線」で結んである）という事実を，調和条件（Matching Condition）と名づける．これは，本質的にLOC_3の仮定を組み込んでいる．与えられた相関実験に対する列の対の各々から，nのすべての値を用いて，$n \to \infty$の極限における，所有された値に関する相関係数を計算することができる．

ここで注意すべききわめて重要な点は，所有された値が，一般に，反事実的に所有されているという点である．よって，スピン・メーターAが$\mathbf{a}$に平行に設定され，スピン・メーターBが$\mathbf{b}$に設定されるならば，最初の2つの列のa_nとb_nに与えられるのは現実に所有された値である．しかし，第3番目の列のa_nに対する値はなんだろうか．これは，スピン・メーターBが$\mathbf{b}$ではなくて$\mathbf{b}'$に平行に設定されるならばa_nが所有するであろう値である．これらの反事実性は，決定主義の仮定のもとでは，つまり，a_n，a'_n，b_n，b'_nの値が粒子源から放出される2粒子の「隠れた」状態全体に決定主義的に関係しているという仮定のもとでは，なんの困難も引き起こさないことを後に論じよう．しかし，もし決定主義を放棄するならば，調和条件がLOC_3に訴えても認可されないことをも同様に論じるだろう．よって，われわれは，ベルの不等式における1つの「隠れた」仮定，すなわち，決定主義を明るみに出したのである〔訳者による補足4参照〕．

しかし，はっきりさせておく必要のある他の仮定がある．相関実験を行なうためには，（一般に反事実的に）所有された値の系列において，項位選出（place selection）をしなければならない．これは，nのどの値においてどの測定操作（I，II，III，またはIV）が行なわれるかを指定するものである．いまや，われわれは，暗黙のうちに行なってきた2つの仮定を別々に表わすことができる：

1. これら項位選出のもとで計算された頻度の極限は，nのすべての値に対して計算されたものと同一の値をもたなければならない．
2. 測定された値に関して求められた相関係数は，これらの選出された所有

値に関して求められたものと同一でなければならない.

われわれは第1の仮定をランダム性の仮定と名づけるが，この仮定が意味しているのは次のことである．つまり，a_n や b_n 等の系列それぞれは，測定操作の選出がある実際に算定可能な規則に支配されると仮定するならば，チャーチ－フォン・ミーゼスの意味でランダムな系列をなしており，そしてさらになお，装置の反対側の部分に入る粒子が所有する性質の値に条件をつけても，やはりランダムな系列であるということである．これは，$\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ に加えて，$\{a_nb_n\}$ のような系列もランダムであることを保証するために必要である．第2の仮定は，

忠実な測定の原理（FM）:

測定結果は，測定の直前にオブザーバブルが所有した値に，数値的に等しい.

によって正当化される．次のことが考えられることに注意しよう．FMが正しくて，測定を行なうごとに，われわれは，そこに存在した値を明るみに出す．しかし，測定された値の頻度分布は，所有された値の選出されなかった頻度分布に等しくないかもしれない．なぜなら，測定の選出はもともとの分布を歪めるかもしれないからである．しかし，それは自然の側の異常な謀略を示唆するであろう．これは，実験者が測定にかける所有値を自由に選んでいること，とくに，測定操作の選出の規則を自由に指定していることと明らかに矛盾する．

いまや，われわれのさまざまな仮定を集め，図式的に

$$\text{見解}\,A \wedge \mathrm{LOC}_3 \wedge \text{決定主義} \wedge \text{ランダム性} \wedge \mathrm{FM} \rightarrow \text{ベルの不等式} \quad (9)$$

と書くことができる.

ベルの不等式の証明でなされた仮定の寄せ集めを眺めると，決定主義とランダム性の主張の間に，緊張，あるいは，はっきりした矛盾さえ存在するように思われるだろう．決定主義は，測定直前のスピン射影の値が粒子源で作られた2粒子の状態に決定主義的に関係していると主張した．他方，ランダム性は，たとえば a_n のひき続く値の系列がランダムであると主張した．しかし，たとえ粒子源の状態が系の先行状態から決定主義的に生みだされるとしても，これは測定結果がランダム系列になりえないことを意味しない――「決定されている」ことは，実際に算定可能な規則によって結局指定できるということではな

い．チャーチ－フォン・ノイマンの意味でのランダム性は，――ある時刻の状態から後の時刻の状態が**一意**に生じるという意味での――**存在論的**決定主義と両立可能なのである．しかし，それは，**実用主義的決定主義**とでも称されるもの，つまり，未来の状態の予測が実際に算定できるとする決定主義とは両立できない．

われわれは，ベルの不等式で**実際に**なされている仮定をこれまで強調してきた．しかし，実際になされて**いない**仮定を強調しておこう．これも同じように重要である：

1. たとえば，a_n や a'_n が明確に定義される結合確率分布をもつとは仮定していない．ベルの不等式を導くときに実際に用いた相関関数は，つねに，両立可能な（可換な）オブザーバブルに言及していた．特に，$n \to \infty$で，$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n a'_n$ が明確に定義される極限をもつとは仮定していない．
2. Brody and de la Peña-Auerbach (1979) が表明した見解に反して，a_n と a'_n が同時に測定できるとは仮定していない．

4.2　反事実的事象と非決定主義

この節では，決定主義をあきらめるならばベルの不等式の証明を阻止できるかという問題を論じる．

ベルの不等式の証明は，現実のあるいは可能な**測定結果**という語のみを用いて，すなわちマクロな測定装置の反応という語のみを用いて与えることができるという主旨の論証，したがって，A, B, C と名づけた見解のような量子力学の可能な解釈に関して中立であるとする論証を素描することから始めよう．この論証はスタップとエバーハードによるものである．このタイプの議論で用いられる局所性仮定を LOC_4 と名づけるが，これは次のように定式化される：

LOC_4：

マクロ的対象の古典的状態は，装置の遠く離れた部分の設定を変えることによって変えることができない．

よって，導かれると称される定理は，本質的に，

$$\mathrm{LOC}_4 \rightarrow \text{ベルの不等式} \tag{10}$$

となる．もしこれが確立されるならば，それは量子力学における非局所性に対する非常に強力で包括的な証明を提供するであろう．図式的には，

$$F \rightarrow \sim(\text{ベル}) \rightarrow \sim(\mathrm{LOC}_4) \tag{11}$$

であり，この結果は，たとえば見解 A にも見解 B にもまったく同じように適用されるだろう．見解 B から LOC_1 に対する違反が導かれることをすでに（先の 3.10）で見た．しかし，(10) は，見解 B には LOC_4 に対する違反もまた含まれていることを証明しているだろう．言い換えると，量子力学における非局所性を証明するためには，ベルの不等式の論証に加えて EPR の論証を行なう必要はもうないということになるだろう．さらに，見解 C によってアインシュタインのジレンマから逃れることも阻止されるだろう．なぜならば，LOC_2 が破られるばかりでなく（このことを受け入れることはできる），LOC_4 もまた破られる（このことは受け入れがたい）ことになるからである．

そこで，スタップとエバーハードの考えに従って (10) の証明を試みてみよう．前節で与えたベルの不等式の証明の数学を単になぞることから始めよう．ただし，記号 a_n，a'_n，b_n，b'_n の定義を適当に変更する．今度は，これらの量を，ミクロ系の所有値としてではなく，これらの量を測定するように設定されたマクロなスピン・メーターの反応として解釈する．したがって，a_n＝（粒子源から放出された粒子の n 番目の対の $\boldsymbol{\sigma}(A)\cdot\mathbf{a}$ を測定するように設定された A メーターの反応）となる．a'_n，b_n，b'_n に対しても同様である．しかし，4 つの相関実験 I，II，III，IV は相互に排他的だから，反事実的に，

a_n＝(実験 I または II がなされる**ならば** A メーターが示す**であろう**反応)

として進まなければならない．

さて，ベルの不等式を導くときの本質的な核心は調和条件であった．たとえば，a_n に適用すると，この条件は，実験 I がなされても実験 II がなされても A メーターが記録する結果は同一であろう，ということを述べている．しかし，実験 I と II は，装置の遠く離れた部分，スピン・メーター B の設定のみが異なっているにすぎない．したがって，次の原理が支持されるならば調和条件が導かれ，ベルの不等式の証明が可能となるだろう．

局所的反事実的確定性の原理（*PLCD*）:

マクロな系に生じ**うる**実験結果は，装置の遠く離れた部分の設定に依存しない確定的（definite）値をもつ．

そうすると，証明に含まれるランダム性の仮定にはいまふれないことにして，明らかに，

$$\text{PLCD} \rightarrow \text{ベルの不等式} \tag{12}$$

さて，

$$\text{LOC}_4 \rightarrow \text{PLCD} \tag{13}$$

を示すことができたとしよう．（13）と（12）からただちに，証明しようとしてきた帰結（10）を得るだろう．

対偶的に論じると，（13）は，PLCD に対する違反から LOC_4 に対する違反が導かれることを述べている．これは，われわれが検討を加えたい由々しき主張である．2つの簡単な思考実験を考えよう．

まず，時計がテーブルの一方の端に置かれていて，時刻 t_2 たとえば 9 時に時報を打つ．私はテーブルの他方の端に立っていて，時刻 t_1 たとえば 9 時 1 秒前に手をあげる．さて，次のような問いをだそう．「もし私が時刻 t_1 に手をあげなかったならば，時計は時刻 t_2 に時報を打っただろうか．」私の手と時計の仕掛けの間に不可思議な結びつきはないと仮定すると，この反事実的問いに対する直観的に正しい答えは，PLCD に従って，「イエス」であるように思われるだろう．そしてさらに，私が時刻 t_1 に手をあげなかったときに，もしも時計が t_2 に時報を打たなかったのであるならば，そのときには，われわれは時計のマクロな振舞いが遠くの私の手の設定に依存しているにちがいない，つまり，LOC_4 が破られている，と結論することもできるだろう，と思う．

この結論を，第 2 の思考実験で生じることと比較しよう．今度は，時計のかわりに，時刻 t_2 に（α 粒子を放出して）崩壊するラジウム原子を置く．再び，t_2 の直前の時刻 t_1 に私は手をあげる．今度の問いはこうである．「もし私が時刻 t_1 に手をあげなかったならば，原子は時刻 t_2 にやはり崩壊しただろうか．」この例において，問いに対する答えが何であるべきかはそれほど明らかでない．ラジウム原子の崩壊は真に非決定主義的過程であると仮定しよう．この仮定の

もとでも一連の事象が，ただし今度は手をあげないで，再び流れていくことを想像すると，時刻 t_2 における結末が原子は崩壊しなかったということであってもかまわない．あるいは，少し異なる例をとって，私が真に非決定主義的なルーレット盤に対して数 17 がでることに賭け，実際には数 16 がでたとしよう．私が「数 16 に賭けていさえすれば，私は賭けに勝ったであろう」と述べたとして，これは正しいであろうか．これは，哲学者たちの見解が異なる難問である．しかし，確かに，決定主義的時計の例にはない仕方で問題が生じている．

反事実的事象に対する真理条件を分析するポピュラーな方法は，可能世界を用いる方法である．このタイプの分析を，反事実的な $\phi \Box\!\!\rightarrow \psi$ に適用しよう．ただし，ϕ は，時刻 t_1 に私は手をあげないという条件を表わし，ψ は，原子が時刻 t_2 に崩壊するという事象を表わし，そして，$\Box\!\!\rightarrow$ は，反事実的条件法を表わすのに便利な記号である．

私が t_1 に手をあげ原子が t_2 に崩壊する世界を，W_i で表わそう．j を変数とする諸世界 W_j が，W_i に対する「近さ」に関して順序づけられているとする．より詳しく述べると，すべての世界をクラスに分け，各クラスは W_i から「等距離の」諸世界からなっているとし，これらのクラスを W_i からの「距離」に関して順序づけるのである．W_l が W_k よりも W_i に近いならば，$W_l \underset{i}{<} W_k$ と書く．すると，$\phi \Box\!\!\rightarrow \psi$ は

$$\exists W_k [\exists W_l((W_l \underset{i}{<} W_k) \wedge W_l(\phi)) \\ \wedge \forall W_j((W_j \underset{i}{<} W_k) \rightarrow (W_j(\phi) \rightarrow W_j((\psi)))]$$

として分析される．こうして，反事実的条件法 $\Box\!\!\rightarrow$ は実質的条件法 $\rightarrow$ の用語に還元される．$W_p(\phi)$ は ϕ が W_p において真であることを表わす．よって，われわれは $\sim W_i(\phi)$ と仮定しているのである．言葉で表わすと，W_i に十分近いある世界が存在して，その世界よりも W_i に近い諸世界のうちには ϕ が成立する世界があり，そして，そのような世界では ψ も成立している．

このいくらか入り組んだ分析は，次のように図解できるだろう．等距離にある世界からなる諸クラスを，W_i を中心とする諸球として表現しよう．そうすると，$\phi \Box\!\!\rightarrow \psi$ は，図 14 に示される状況において真であろう．ただし，条件 ϕ と ψ は，それらが成立する世界のクラスと同一視されている．ϕ は影をつけ

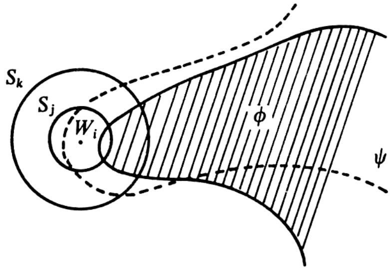


図 14　反事実的条件法 $\phi \square\!\!\rightarrow \psi$ に対する真理条件．W_i は現実の世界を表わす．S_j と S_k は，W_i から「等距離」にある可能世界の「球」である．

て示されており，ψ は点線内の領域である．W_k は球 S_k 上のある世界であり，W_j は球 S_j 上の世界である．

デビット・ルイスが著作 *Counterfactuals* で与えた例をとりあげよう．カンガルーに尻尾がなかったならば，カンガルーはひっくりかえるだろう．実質的条件法としてみると，これは，W_i から十分遠い世界において必ずしも成立するとは限らない，つまり，カンガルーが松葉杖をついているような世界においては．

われわれの例では時間が本質的な仕方で入り込んでいる――われわれは時間的反事実的事象をあつかっているのである．「十分近い」という指定は，t_2 に至るまでの，しかし t_2 を含まない世界の諸状態に言及していなければならない，ということがここでは重要である．すなわち，十分近い世界という指定の中に，t_2 において ψ が成立しているという事実を含めてはならない．このただし書きをつけておけば，次の種類の例：「もし私が t_1 にスイッチ・レバーを引くならば，t_2 に水素爆弾が炸裂するだろう」をうまく処理することができる．「十分近い世界」を指定する際に炸裂後に起きることにも言及するならば，この言明は偽となってしまい，他方では，言明：「私がスイッチ・レバーを引くならば〔引いても〕，スイッチは動かないだろう」は真となる．なぜなら，動かないスイッチは，水素爆弾の炸裂によって破壊された世界よりも現実の世界に近いからである．このようなことはきわめて直観に反し，「十分近い」という指定を t_2 にいたるまでの，しかし，t_2 を含まない世界の状態に制限しておく

ならば，その制限が示唆するようにうまく処理することができる．

それでは，非形式的に次のような世界を考えよう．それは，現実の世界で成立しないψがここでは成立しているという事実においてのみ，現実の世界と異なる世界であって，他のすべてのことは，自然法則も含めて同じ世界である．この世界をt_2の直前まで走らせて，「t_2にψは，今度も生じるにちがいないか」と，問うことにしよう．しかし，ψの出現が本質的に確率的であるならば，この現実でない方の世界においてt_2にψが生じる必然性はない．これは，パラドクシカルではない．それは，ψの出現が非決定主義的（本質的に確率的）であると述べるときに意味していることに他ならない．t_2以前の世界の記述を洗練してt_2においてψが必ず生じるようにすることは，端的に言って，できない．もしそのような洗練が可能ならば，ψの出現は決定主義的であり，非決定主義的ではないであろう．

もとの例にもどろう．t_1において手をさげたままで原子がt_2に崩壊しないこともあるという事実は，局所性に対する違反とはなんの関係もない．特に，原子の崩壊がマクロな記録装置の引き金になると仮定して，LOC_4に対する違反との関係が生じるわけでもない．単に，ラジウム原子の崩壊が非決定主義的であるという主張が意味することを認めているにすぎない．よって，PLCDにとってまずいところは，「確定的（definite)」なる語に付与される意味である．本質的に非決定主義的な状況における結果が確定的であると言われる意味は，特定の場合に特定の世界において，生じる結果はなんであれ，それは，はっきり定まっている（determinate)，という意味で確定的なのであって，次のような意味ではない．つまり，それが，必ず真偽のどちらかであるという点ではっきり定まっている（determinate）と同時に，その生起に先行する世界の可能な在り方によって必然的に真になるかまたは必然的に偽になるという点で，はっきり定められている（determined)，という意味ではない．

この議論の結論は，決定主義を仮定するならば，PLCDがLOC_4のもとで保証される妥当な原理であるということである．この仮定のもとでは，ベルの不等式に対する違反はLOC_4が破られたことを示す．実際，遠くからある性質の所有値を変えることができるならば，そしてこの所有値が測定結果を示すマクロな指針と決定主義的に結びついているならば，指針の状態は「遠隔的に」変

えられうるのである．言いかえると，LOC_4 が成立するのは，LOC_3 が成立するとき，かつそのときのみであり，LOC_3 を破ることは，LOC_4 を破っていることになる．

しかし，たとえば見解 B で考察されたような非決定主義的枠組みにおいては，PLCD を LOC_4 のもとで保証される妥当な原理として持ち出しうるのかは，控え目に見ても，きわめて疑わしい．そして，PLCD を用いることができないならば，スタップとエバーハードが彼らの証明法について主張した一般性は否定されなければならない．

スタップ－エバーハード証明についての最後のコメント．エバーハードが，彼の帰結を表現するもう1つの方法として，Eberhard（1977）で言及した反事実的事象を用いない方法がある．着想はこうである．図13で例証したような表に記録するのは，同時には実行できないが，それぞれは実行可能な4つの相関実験の結果ではなくて，すべて現実に実行された4つの相関実験の結果のみを記録するのである．言いかえると，列の対（つい）それぞれはつまみ設定の適当な組み合わせで実行された一連の測定を記録している．4組のそのような一連の相関結果が得られると，それらを並べて書き下して完全な8列の表を作る．しかし今度は，各行は，粒子源から放出された4組の異なる粒子対を指している．

一般に，どの行に対しても調和条件が成立しないだろうということはあまりにも明らかである．しかし，偶然成立している行もあるだろう．よって，調和条件が成立している行が選ばれるように，列についての項位選出を行なう．表の中のこのように項位選出された行のみを用いて，新たに相関係数を計算するならば，エバーハードが指摘しているように，結果は，一般に，表全体で計算された相関係数と一致しえない．このことは完全に正しい．なぜなら，前者は構成の仕方によってベルの不等式を満足するが，後者は一般にそれを満足しない．しかし，このことの全体は LOC_4 となんの関係も持たない．それは，ただ，ランダムな系列から現実の結果を見て行なう項位選出がこれらの結果の頻度の極限値を変えうる，というよく知られた事実を証明しているにすぎない．

しかしながら，見解 A を支持しながら決定主義をあきらめても，スタップとエバーハードが用いたのとは**異なる**議論の道筋によって，ベルの不等式を導

くことができると主張する文献もある．4.4節で，いわゆる確率的隠れた変数理論の考えを非局所性との関係で考察するであろう．しかしまず，議論の主要な道筋を中断して，いくつかの数学的な扱い方を考察しておこう．これらによって，基本的なベルの不等式に代わる便利な定式化を与えることができるであろう．

4.3　ベルの不等式の変形

不等式（4）

$$|c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})+c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}')+c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})-c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}')|\leqq 2$$

から始めよう．$\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}'$ を入れかえると，

$$|c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})+c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}')-(c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})-c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}'))|\leqq 2$$

が得られる．

$$X=c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})+c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}') \tag{14}$$

$$Y=c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})-c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}') \tag{15}$$

と定義すると，

$$|X+Y|\leqq 2 \tag{16}$$

$$|X-Y|\leqq 2 \tag{17}$$

が示される．X と Y が同符号ならば，(16) を用いて，

$$|X|+|Y|=|X+Y|\leqq 2$$

他方，X と Y が異符号ならば，(17) を用いて，

$$|X|+|Y|=|X-Y|\leqq 2$$

よって，あらゆる場合に，

$$|X|+|Y|\leqq 2 \tag{18}$$

あるいは，

$$|Y|\leqq 2-|X| \tag{19}$$

さて，

$$c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=-1 \tag{20}$$

が成立する実験を考えることにして，方向 $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に平行に選ぶ（記法 $c(\mathbf{b},\ \mathbf{b})$ は，$\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に平行に選んだときの $c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ を意味する）．そうすると，(19) は，

$$|c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})-c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}')|\leqq 2-|c(\mathbf{b},\ \mathbf{b})+c(\mathbf{b},\ \mathbf{b}')|$$

$$=2-|-1+c(\mathbf{b},\ \mathbf{b}')|$$
$$=2-|1-c(\mathbf{b},\ \mathbf{b}')|$$
$$=2-(1-c(\mathbf{b},\ \mathbf{b}'))$$
$$=1+c(\mathbf{b},\ \mathbf{b}')$$

よって，任意の方向 $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ に対して，

$$|c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})-c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}')|\leqq 1+c(\mathbf{b},\ \mathbf{b}') \tag{21}$$

これは，ベルが不等式を提示したときのもとの形である．しかし，これは (20) を仮定したときにしか適用できないことに注意しておこう．

(20) は状態 $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ に対して真であるが，不等式 (4) は，(20) で表わされる厳密な反相関が成立しないような一般的な場合にも成り立つから，より一般的に適用可能な式である．

基本的な不等式 (4) に対するもう１つの有用な表現法は，相関関数のかわりに確率を用いるものである．たとえば，$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b)_{a,b}$ で，$\boldsymbol{\sigma}(A)\cdot\mathbf{a}$ の測定が値 ε_a を生じ，$\boldsymbol{\sigma}(B)\cdot\mathbf{b}$ の測定が値 ε_b を生じる結合確率を表わすことにしよう．ただし，ε_a と ε_b は値±1をとり，$\boldsymbol{\sigma}(A)$ と $\boldsymbol{\sigma}(B)$ は，それぞれ，A 粒子と B 粒子（すなわち，A メーターと B メーターに向かっていく粒子それぞれ）に対するパウリのスピン・ベクトル演算子である．$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_{b'})_{a,b'}$，$\mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'},\ \varepsilon_b)_{a'b}$，$\mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'},\ \varepsilon_{b'})_{a'b'}$ に対しても同様である．さらに，$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a)_a$ を，スピン・メーター B で何が測定されるかとは無関係に，$\boldsymbol{\sigma}(A)\cdot\mathbf{a}$ に対して値 ε_a を測定する確率としよう．$\mathrm{Prob}(\varepsilon_b)_b$ についても同様とする．このとき，

$$\mathrm{Prob}(+1)_a=\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(+1,\ -1)_{a,b} \tag{22}$$
$$\mathrm{Prob}(+1)_b=\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(-1,\ +1)_{a,b} \tag{23}$$

と

$$\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(-1,\ -1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(+1,\ -1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(-1,\ +1)_{a,b}=1 \tag{24}$$

が成立する．式 (22) から (24) までにより，容易に，

$$\mathrm{Prob}(+1,\ -1)_{a,b}=\mathrm{Prob}(+1)_a-\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b} \tag{25}$$
$$\mathrm{Prob}(-1,\ +1)_{a,b}=\mathrm{Prob}(+1)_b-\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b} \tag{26}$$

と

$$\mathrm{Prob}(-1,\ -1)_{a,b}=1-\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}-\mathrm{Prob}(+1,\ -1)_{a,b}$$

$$-\mathrm{Prob}(-1,\ +1)_{a,b}$$

$$=1+\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}-\mathrm{Prob}(+1)_{a}-\mathrm{Prob}(+1)_{b} \qquad (27)$$

が導かれる．式（25）から（27）までにより，

$$c(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(-1,\ -1)_{a,b}$$
$$-\mathrm{Prob}(+1,\ -1)_{a,b}-\mathrm{Prob}(-1,\ +1)_{a,b}$$
$$=4\,\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}-2\,\mathrm{Prob}(+1)_{a}-2\,\mathrm{Prob}(+1)_{b}+1 \qquad (28)$$

を得る．$c(\mathbf{a},\ \mathbf{b}')$，$c(\mathbf{a}',\ \mathbf{b})$，$\mathbf{c}(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}')$ に対しても同じような表現を書き下すと，（4）から容易に不等式

$$-1\leqq\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b}+\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a,b'}+\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a',b}$$
$$-\mathrm{Prob}(+1,\ +1)_{a',b'}-\mathrm{Prob}(+1)_{a}-\mathrm{Prob}(+1)_{b}\leqq 0 \qquad (29)$$

が導かれる．より一般的には，たとえば，$\varepsilon_a=\varepsilon_{a'}=\varepsilon_A$，$\varepsilon_b=\varepsilon_{b'}=\varepsilon_B$ を選ぶと，

$$-1\leqq\mathrm{Prob}(\varepsilon_A,\ \varepsilon_B)_{a,b}+\mathrm{Prob}(\varepsilon_A,\ \varepsilon_B)_{a,b'}$$
$$+\mathrm{Prob}(\varepsilon_A,\ \varepsilon_B)_{a',b}-\mathrm{Prob}(\varepsilon_A,\ \varepsilon_B)_{a',b'}$$
$$-\mathrm{Prob}(\varepsilon_A)_{a}-\mathrm{Prob}(\varepsilon_B)_{b}\leqq 0 \qquad (30)$$

と書くことができる．ただし，$\varepsilon_A=\pm 1$，$\varepsilon_B=\pm 1$.

$\varepsilon_A\neq\varepsilon_B$ に対する 2 つの不等式に -1 を掛けて，$\varepsilon_A=\varepsilon_B$ に対する 2 つの不等式に加えれば，（30）から（4）が導けるという意味で，（30）に含まれる 4 つの不等式の組は実際に（4）と同等である．

4.4　確率的隠れた変数理論

見解 A を非決定主義と結びつけてベルの不等式の証明ができるかという問題に，いまもどることにしよう．この議論の基礎を提供するのは，いわゆる確率的隠れた変数理論の枠組みであろう．（量子力学の経験的予測のすべてを再現するのではない可能性をも認めるために，「解釈」ではなくて「理論」という語を用いる．）そのような理論の基本的考えはこうである．隠れた変数による粒子源の「完全な」記述は，ベル型の実験における 2 粒子が所有する局所的オブザーバブルの値を決定するのではなくて，可能な値が生じる確率のみを決定するというのである．具体的には次のように考えることができる．任意の与えられた方向におけるスピン成分の値は確率的に時間発展するのであって，粒子源の状態は，ただ，その後の測定の際に個々の値が現われる確率のみを制御

する．われわれは，依然として，測定が忠実に行なわれると仮定している．つまり，時刻 t における測定は，時刻 t において所有される値を明らかにする．前に述べたように，測定結果自体が所有値と確率的につながっているならば，そもそもいかなる意味で測定を問題にできるのかが分かりにくくなるだろう．より形式的に述べると，われわれは，オブザーバブル a と b が所有する値 ε_a と ε_b に対する結合確率密度

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}^{\eta_A, \eta_B}$$

の存在を仮定する．ただし，a と b はそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}(A)\cdot\mathbf{a}$ と $\boldsymbol{\sigma}(B)\cdot\mathbf{b}$ に対する略記であり，値 λ は粒子源の状態を指定する隠れた変数である．上つき文字 η_A と η_B はそれぞれスピン・メーター A と B の実際の設定を示している．

$\eta_A=\mathbf{a}$ かつ $\eta_B=\mathbf{b}$ ならば，これは，隠れた変数の値 λ に対して，a と b を測定して結果 ε_a と ε_b を見出す確率である．測定結果を用いるこの結合確率は，単に，

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}$$

で示そう．しかし，$\eta_A\neq\mathbf{a}$ かつ $\eta_B\neq\mathbf{b}$ であっても，結合確率 $\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}^{\eta_A, \eta_B}$ は存在すると仮定されている．もっとも，その値を，測定結果の確率を用いて直接に書きなおすことはできないだろう．

さて，

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}^{\eta_A, \eta_B} =\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\varepsilon_b\ \&\ \lambda)_a^{\eta_A, \eta_B}\times\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b^{\eta_A, \eta_B}\times\rho^{\eta_A, \eta_B}(\lambda) \qquad (31)$$

と書く．ただし，$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\varepsilon_b\ \&\ \lambda)_a^{\eta_A, \eta_B}$ は，（スピン・メーターの設定 η_A と η_B のもとで）b の値が ε_b で隠れた変数が λ のとき，a が値 ε_a をもつ条件確率である．$\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b^{\eta_A, \eta_B}$ は，隠れた変数の値が λ のとき，b が値 ε_b をもつ条件確率であり，$\rho^{\eta_A, \eta_B}(\lambda)$ は，隠れた変数が値 λ となる確率密度である．

ベルの不等式を導くために，初めに，次の**完全性**

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\varepsilon_b\ \&\ \lambda)_a^{\eta_A, \eta_B}=\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a^{\eta_A, \eta_B} \qquad (32)$$

を仮定しよう．(32) の意義を最初に指摘したのは Jarrett (1984) であるが，それは，λ が $\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\varepsilon_b\ \&\ \lambda)_a^{\eta_A, \eta_B}$ の**完全な**決定に十分であるというのであった．ε_b の指定は必要でない．われわれは，少し後に，完全性条件を破ることの意義に関する議論にもどるであろう．

完全性仮定（32）のもとで，式（31）は

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}^{\eta_A,\eta_B}=\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a^{\eta_A,\eta_B}\times\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b^{\eta_A,\eta_B}\times\rho^{\eta_A,\eta_B}(\lambda) \qquad (33)$$

となる．しかし，ベルの不等式を導くためには，次の局所性仮定：

$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a^{\eta_A,\eta_B}$ は η_B から独立である

$\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_a^{\eta_A,\eta_B}$ は η_A から独立である

$\rho^{\eta_A,\eta_B}(\lambda)$ は η_A と η_B から独立である

を付け加える必要がある．（33）に加えて，これらの局所性仮定を導入すると，結局

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}^{\eta_A,\eta_B}=\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a^{\eta_A}\times\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b^{\eta_B}\times\rho(\lambda) \qquad (34)$$

が得られる．ただし，上に述べたような，確率が依存しない指標は削除した．特に，ε_a と ε_b が測定結果を表わすときは，

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b,\ \lambda)_{a,b}=\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a\times\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b\times\rho(\lambda) \qquad (35)$$

（35）の表現は，多くの文献で「因子分解可能性」（factorizability）と称されている．

（35）から

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b)_{a,b}=\int_\Lambda \mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a\cdot\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b\cdot\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (36)$$

同様に

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a,\ \varepsilon_{b'})_{a,b'}=\int_\Lambda \mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a\cdot\mathrm{Prob}(\varepsilon_{b'}/\lambda)_{b'}\cdot\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (37)$$

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'},\ \varepsilon_b)_{a',b}=\int_\Lambda \mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'}/\lambda)_{a'}\cdot\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b\cdot\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (38)$$

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'},\ \varepsilon_{b'})_{a',b'}=\int_\Lambda \mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'}/\lambda)_{a'}\cdot\mathrm{Prob}(\varepsilon_{b'}/\lambda)_{b'}\cdot\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (39)$$

さらに

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_a)_a=\int_\Lambda \mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a\cdot\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (40)$$

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon_b)_b = \int_\Lambda \mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b \cdot \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{41}$$

表現（36），（37），（38），（39），（40），（41）によって，不等式（30）を証明することができる．これは，区間［0, 1］に属する任意の実数 x，y，x'，y' に対して成立する次の不等式

$$-1 \leqq xy + x'y + xy' - x'y' - x - y \leqq 0 \tag{42}$$

から，ただちに導かれる．

$$x = \mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a$$
$$y = \mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b$$
$$x' = \mathrm{Prob}(\varepsilon_{a'}/\lambda)_{a'}$$
$$y' = \mathrm{Prob}(\varepsilon_{b'}/\lambda)_{b'}$$

を代入し，

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{a'} = \varepsilon_A$$
$$\varepsilon_b = \varepsilon_{b'} = \varepsilon_B$$

と仮定し，

$$\int_\Lambda \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1$$

を思い出して，λ について積分すると，（30）が生じる．すでに見たように，（30）から基本的な不等式（4）が導かれる．こうして，われわれは，反事実的事象を用いないで，（4）の証明を与えることに成功した．

ベルの不等式の破れは，われわれが因子分解可能性を諦めなければならないことを意味する．しかし，この事態は，1 重項状態の相関に対してはベルの不等式を用いなくても，次の議論によって導くことができる．因子分解可能な確率的隠れた変数理論は，**a** を **b** に平行にするもとの EPR 設定のように，厳密な反相関を取り込むことができない．この場合，

$$\mathrm{Prob}(+1, +1)_{a,b} = \mathrm{Prob}(-1, -1)_{a,b} = 0$$

を要求することになるが，しかし，たとえば，（36）に代入すると，これから

$$\int_\Lambda \mathrm{Prob}(+1/\lambda)_a \cdot \mathrm{Prob}(+1/\lambda)_b \cdot \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 0$$

がでてくる．被積分項の因子はすべて非負であるから，これは，

$$\mathrm{Prob}(+1/\lambda)_a=0 \quad \text{または} \quad \mathrm{Prob}(+1/\lambda)_b=0$$

を含意する．たとえば，最初の選択肢を考えると，$\mathrm{Prob}(-1/\lambda)_a=1$ がでてくる．しかし，$\varepsilon_a=\varepsilon_b=-1$ について上の議論をくり返すと，$\mathrm{Prob}(-1/\lambda)_b=0$ が与えられ，これは $\mathrm{Prob}(+1/\lambda)_b=1$ を含意する．よって，厳密な反相関の場合，すべての条件確率 $\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\lambda)_a$ と $\mathrm{Prob}(\varepsilon_b/\lambda)_b$ は 0 か 1 となり，この理論が決定主義的理論に変わってしまったことは明らかである．

次節で見るように，これまでなされたベルの不等式の実験的テストにおいて採用されてきた系が，われわれの理想的思考実験の厳密な反相関を含んでいないということは本当である．よって，これらのどの実験的テストにおいても，ベルの不等式の不成立は因子分解可能性の不成立を証明すると見なさざるをえない．

さて，完全性条件（32）を満たさないことの意義は何かという問題にもどることにしたい．これが意味するのは，A 粒子が所有する性質の確率分布が，B 粒子の所有する性質に本質的な仕方で依存する，ということであろう．完全性条件を理解する別の仕方は，粒子源の完全な状態 λ を，a が値 ε_a をとり b が値 ε_b をとる共通の（確率的）原因と考えることである．したがって，式（32）が述べるのは，λ が ε_b を ε_a から**遮蔽する**（screen off）ということである．よくなされる議論として次のようなものがある．a と b との相関を説明するには，共通の原因への確率的な連結か，もしくは相互の直接的な確率的因果連結に基づけてのみ可能になるのだから，もし（32）が破られるならば，a と b は直接的な確率的**因果**連結を示すことになる，というのである．しかし，この結論は，直接的な因果連結に要求されるロバストネス（robustness，頑健性の意）に対する必要条件を適切に考慮するならば，疑問の生じる可能性がある．因果関係のロバストネスで，われわれが意味するのは次のことである．2 つの分離した系 A と B に属する 2 つの物理量 a と b の間の確率的因果結合が**ロバスト**であると言われるのは，$B(A)$ に作用する十分小さな撹乱のクラスが存在して $b(a)$ が $a(b)$ をこれらの撹乱から遮蔽するとき，かつそのときにかぎる．

B に作用する撹乱を d で表わすと，この条件の前半は，形式的に，

$$\exists D(\forall d\in D(\mathrm{Prob}(a=\varepsilon_a/b=\varepsilon_b \;\&\; d)=\mathrm{Prob}(a=\varepsilon_a/b=\varepsilon_b))) \quad (43)$$

と表わすことができる．A に作用する撹乱に対しても同じような条件を書き下

すことができる.

因果関係に対する必要条件としてロバストネスを要求することは，関係項の一方に適当に小さな撹乱を与えても因果関係自体には影響しないことを意味する．本質的にこれは，因果的過程を同定するマーク法（mark method）〔訳者による補足3参照〕の基礎である．これらの過程は，局所的事象構造における小さな撹乱（マーク）を，当該の因果法則に従って伝播させる.

このロバストネス条件を言い換えてわれわれの議論の1重項状態に適用することは，容易にできる．粒子 B に及ぼされる撹乱による量子力学的状態 $|\Psi\rangle$ の可能な摂動を考えよう．問題を扱いやすくするために，粒子 B を任意の強度の一様な古典場と結合する場合に議論をかぎることにし，これらの場は，摂動を与えるために，ある定められた時間の間だけスイッチが入れられるとする．Ψ' を，摂動の与えられたこれらの状態の上を走る変数としよう．そうすると，a と b が，方向 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の任意の選択に対して，確率的因果結合を示す必要条件は：

$$\exists D \forall a \forall b (\forall |\Psi'\rangle \in D$$
$$(\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(a=\varepsilon_a/b=\varepsilon_b)=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=\varepsilon_a/b=\varepsilon_b))) \qquad (44)$$

ただし，Prob の上つき文字は量子力学的状態を表わし，クラス D はこの十分弱い場によって摂動の与えられた状態の空でない集合である.

さて，条件（44）が破られることを，実際の計算を行なって示すことにしよう．（44）は a と b の間の直接的な確率的因果連結に対する必要条件であるから，そのような連結は存在しないという帰結が導かれることになる.

任意に選んだ Z 軸方向に対する $\boldsymbol{\sigma}_A$ と $\boldsymbol{\sigma}_B$ のスピン射影を，それぞれ σ_{Az} と σ_{Bz} で表わそう．そうすると，

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_{Az}=+1\rangle|\sigma_{Bz}=-1\rangle-|\sigma_{Az}=-1\rangle|\sigma_{Bz}=+1\rangle) \qquad (45)$$

となり，これは，粒子 A と B に対するヒルベルト空間 $\mathbb{H}_A$ と $\mathbb{H}_B$ のテンソル積 $\mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$ のベクトルである.

$\mathbb{H}_B$ 上で作用する任意の摂動を考えよう〔訳者による補足2参照〕．これは，$\mathbb{H}_B$ に属するすべてのベクトルに対する 2×2 ユニタリ変換を誘導する．したがって，この変換は2次元ユニタリ変換群 $U(2)$ の要素である．$U(2)$が，1次

元ユニタリ変換群 $U(1)$ と2次元特殊ユニタリ変換群 $SU(2)$ の直積として示されることはよく知られている．形式的には，

$$U(2)=U(1)\times SU(2) \tag{46}$$

である．

さて，$U(1)$ の要素は単に位相因子を変換するだけであって粒子 B に結びつけられた物理的状態（射線）を変えないから，すべての確率計算において無視できる．$SU(2)$ の要素による作用は，つねに，$e^{i(\sigma_B\cdot\mathbf{n})\phi/2}$ と表現することができる．ただし，単位ベクトル $\mathbf{n}$ の方向と角 ϕ の大きさは，群の3つのパラメータの上を走る（$0\leqq\phi<4\pi$ に注意せよ）．

$e^{i(\sigma_B\cdot\mathbf{n})\phi/2}$ を $u(\mathbf{n},\ \phi)$ で表わす．そうすると，摂動の与えられた状態の最も一般的な形は，

$$|\Psi'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\sigma_{Az}=+1\rangle u(\mathbf{n},\ \phi)\,|\sigma_{Bz}=-1\rangle$$
$$-|\sigma_{Az}=-1\rangle u(\mathbf{n},\ \phi)\,|\sigma_{Bz}=+1\rangle) \tag{47}$$

で与えられる．以下においては，特に $\varepsilon_a=\varepsilon_b=1$ と選んだ場合を考察しよう．

よって，よく知られた結果（式1.106参照）

$$\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1)=\frac{1}{2} \tag{48}$$

$$\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(b=1)=\frac{1}{2} \tag{49}$$

$$\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b=1)=\sin^2\frac{1}{2}\,\theta_{ab} \tag{50}$$

を得る．ただし，θ_{ab} は方向 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の角である．いま興味があるのは，$\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(a=1)$，$\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(b=1)$，$\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(a=1/b=1)$ を計算することである．

確率的因果性に対するロバストネス条件は，単純に，

$$\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(a=1/b=1)=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b=1) \tag{51}$$

となる．われわれは，任意に与えられた撹乱状態 $|\Psi'\rangle$ に対して，(51) が破られる方向 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がつねに存在することを示そう．

新しい確率を計算するために，ユニタリ変換 $u(\mathbf{n},\ -\phi)(=u^{-1}(\mathbf{n},\ \phi))$ を空間 $\mathbb{H}_B$ に適用しよう．これは，$|\Psi'\rangle$ を $|\Psi\rangle$ に戻すが，作用素 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}$ に回転 $R(\mathbf{n},$

$-\phi$）を誘導する．$R(\mathbf{n}, \phi)$ は，3 次元回転群 $SO(3)$ の要素であり，方向 $\mathbf{n}$ のまわりの（実際の）時計まわりの回転に対応している．上の結果は，$SU(2)$ と $SO(3)$ の間に存在する周知の準同形写像を直接に表現している．（$SU(2)$ は，まさしく，$SO(3)$ の単連結普遍被覆群である．）簡潔に表わすと，

$$u(\mathbf{n}, \phi)\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}u(\mathbf{n}, -\phi)=R(\mathbf{n}, \phi)\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}} \tag{52}$$

式（52）の左辺において，u は $\boldsymbol{\sigma}_B$ のスピノルの指標に作用し，右辺の R はベクトルの指標に作用する．よって，作用素 a と b をユニタリ変換した結果は，

$$a=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{A}}\cdot\mathbf{a} \to a'=a \tag{53}$$

$$\begin{aligned} b=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}\cdot\mathbf{b} \to b' &=(u(\mathbf{n}, -\phi)\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}u(\mathbf{n}, \phi))\cdot\mathbf{b} \\ &=(R(\mathbf{n}, -\phi)\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}})\cdot\mathbf{b} \\ &=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}\cdot(R(\mathbf{n}, \phi)\mathbf{b})=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}\cdot\mathbf{b}' \end{aligned} \tag{54}$$

となる．ただし，

$$\mathbf{b}'=R(\mathbf{n}, \phi)\mathbf{b} \tag{55}$$

よって，ただちに，次の結果を得る：

1. $$\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(a=1)=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a'=1)=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1)=\frac{1}{2} \tag{56}$$

これは，粒子 B に作用する摂動を用いて粒子 A の位置に信号を送ることができないことを，示している．われわれは，後の 4.6 節でこれをより詳しく論じるだろう．

2. $$\mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(b=1)=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(b'=1)=\frac{1}{2} \tag{57}$$

これはむしろ驚くべき結果であるが，いま考察している例の特殊な性質である．

3. $$\begin{aligned} \mathrm{Prob}^{|\Psi'\rangle}(a=1/b=1) &=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a'=1/b'=1) \\ &=\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b'=1)=\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ab'} \end{aligned} \tag{58}$$

よって，ロバストネス条件（51）は，$\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ab'}=\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ab}$ となる，あるいは，角度はすべて 0 から π の領域にあるから，

$$\theta_{ab}=\theta_{ab'} \tag{59}$$

となる．（59）には，単純な幾何学的解釈を与えることができる．

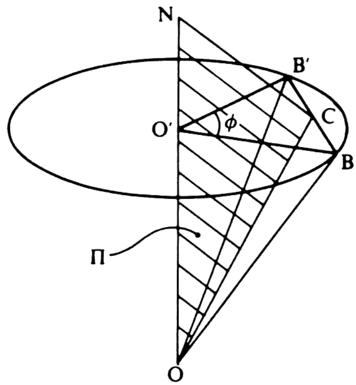


図 15　単位ベクトル $\overrightarrow{OB}$ を軸 $\overrightarrow{ON}$ のまわりに角 ϕ だけ回転させると，ベクトル $\overrightarrow{OB}'$ になるとする．OC は，$\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OB}'$ がなす角の 2 等分線である．Π で示される平面 NOC は，斜線をひいて示してある．

図 15 において

ON は単位ベクトル **n** を表わす

OB は単位ベクトル **b** を表わす

OB′ は単位ベクトル **b**′ を表わす

B と B′ は O′ を中心とする円周上にあり，この円を含む平面は ON に垂直である．∠BO′B′ $=\phi$．さて，$\theta_{ab}=\theta_{ab'}$ は，

$$\cos\theta_{ab}=\cos\theta_{ab'}$$

あるいは，
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}'$$

あるいは，
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{b}')=0$$

に等値である．したがって，**a** は直線 BB′ に垂直な平面内になければならない．この平面を Π と呼ぼう．Π は ON と OC を含む平面として特徴づけることもできる．ただし，OC は **b** と **b**′ の角を 2 等分する．図では，平面 Π に斜線をつけて示してある．よって，次の定理を得る．

定理：

b から **b**′ への回転となる任意の摂動が粒子 B に与えられるとする．条件確率 $\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b=1)$ がこの摂動のもとで不変（ロバスト）であるのは，方向 **a** が，方向 **b** と **b**′ の 2 等分線と回転軸によって定まる平面内にあるとき，

かつ，そのときにかぎる．

系：

(1) **n** が **a** と一致するならば，
$\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b=1)$ はすべての **b** に対してロバストである．

(2) **n** が **b** と一致するならば，
$\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b=1)$ はすべての **a** に対してロバストである．

(3) いかに小さな任意の摂動（回転）に対しても，$\mathrm{Prob}^{|\Psi\rangle}(a=1/b=1)$ がロバストで**ない**方向 **a** と **b** がつねに存在する．

この最後の系によって，a と b を確率的因果性で関係づけられていると見なしえないことが証明されたと，私は信じている．a，b 間の相関は，粒子がその源から放出される際の特定の量子力学的状態，すなわち1重項状態の性質である．この状態は全体主義（holism）あるいは分離不能性（nonseparability）の特徴を含み，これは確率的因果性に対して必要なロバストネスを欠いているから，**遠隔作用**（action-at-a-distance）に対立する意味で**遠隔感応**（passion-at-a-distance）と名づけられるだろう．A 粒子は，それ自身の独立の性質（傾向性）をもっていない．条件確率 $\mathrm{Prob}(\varepsilon_a/\varepsilon_b)_a^{\eta_A\cdot\eta_B}$ は，2粒子の結合系の本来関係的な性質を表わしているのかもしれない．この状況を，式 (33) の下で導入した付加的な局所性仮定が破られた結果と対照させてみよう．もし後者の条件が満足されないならば，われわれは遠隔作用の明らかな事例をもつことになるだろう．たとえば，装置 B の設定を変えると A 粒子の位置と粒子源に現われる性質の条件確率が変わることになるだろう，等々．

遠隔作用がないという意味での局所性と，2粒子に別々に性質を帰属させるという意味での分離可能性との相違をここで導いたが，これに驚くほどよく似た相違を，6章で扱う議論の展開においても見出すだろう．

4.5 ベルの不等式に対する実験的テスト

この節では，過去15年かそこらに行なわれたベルの不等式の実験的テストに向かうことにしよう．

第1に強調したいのは，ベルの不等式が実験的に実行可能な相関係数を含んでいるので，途中で量子力学に言及しないで直接テストできる，ということで

ある．すでに見てきたように，量子力学の予測はある状況においてベルの不等式を破る．しかし，2つの異なる問いがある：

1. ベルの不等式は破られるか．
2. 破られたとして，それは量子力学の予測と一致するか．

実験結果に対しては，これら両方の問いが肯定的に答えられたとする点で，広い意見の一致がある．

これまでなされてきた実験には，基本的に3つのタイプがある．第1のタイプは，カルシウムや水銀などの原子の励起状態からのカスケード遷移で放出された——あるいは最も新しい例では，励起された重水素から同時に放出された——2つの「可視」光子の間の偏極相関を測定する．第2のタイプは，低エネルギーの陽子－陽子散乱におけるスピン相関を見る．第3のタイプは，ポジトロニウムの1重項状態の消滅崩壊からのγ線偏極に関係する．これら3つのタイプの実験の特殊な性質を論じるまえに，それぞれのタイプの主要な実験と，その結果が量子力学の予測と一致しベルの不等式を破る（√で示す）か，または量子力学の予測と一致せずベルの不等式を破らない（×で示す）かを，表1にまとめておいた．

さて，これらの実験についていくつかの簡単なコメントをしておこう．それらのうち2つ，Holt—Pipkin と Faraci 他のみが量子力学と一致せず，しかも，量子力学の予測が破れるところでベルの不等式との一致を示していた．もちろん，物理学者の観点からは量子力学の予測のいかなる破れもきわめて批判的に見られ，これら不一致の双方の事例において実験がくり返されたが，量子力学との不一致は再現できなかった．こういったすべてを考慮して，いまでは，この2つの例外的実験がある思いもよらない系統誤差を含んでいたにちがいない，と見なすことで一般に同意されている．

γ線偏極に関係する実験は，γ線の偏極状態の指示として2次的コンプトン散乱を用いなければならないという難点を含んでいる．これらの実験を解析するとき，クライン－仁科の公式が偏極の「隠れた」状態においても適用できる，と仮定している．同じ留保条件は，2次的標的からの陽子散乱をスピンの向きの指示として用いる低エネルギー陽子－陽子散乱にもあてはまる．

光学的な光子実験では偏極を直接検出できるという大きな利点がある．典型

表 1 ベルの不等式の実験的テスト．√は，不等式が破られた結果を示し，×は，破られていない結果を示す．

年	実験者	結果	摘要
可視光子相関実験			
1972	Freedman, Clauser	√	Ca カスケード遷移を利用
1972	Holt, Pipkin	×	Hg カスケード遷移を利用
1976	Clauser	√	Hg カスケード遷移を利用
1976	Fry, Thomson	√	Hg カスケード遷移を利用
1981	Aspect, Grangier, Roger	√	1 チャンネル偏光子と Ca カスケード遷移を利用
1982	Aspect, Grangier, Roger	√	2 チャンネル偏光子と Ca カスケード遷移を利用
1982	Aspect, Dalibard, Roger	√	光スイッチと Ca カスケード遷移を利用
1985	Perrie, Duncan, Beyer, Kleinpoppen.	√	準安定重水素原子による同時 2 光子放出を利用
低エネルギー陽子－陽子散乱			
1976	Lamehi-Rachti, Mittig	√	スピン相関測定のために 2 重散乱を利用
γ線偏極相関実験			
1974	Faraci, Gutkowski, Notarrigo, Pennisi	×	コンプトン偏極計と ^{22}Na 源を利用
1975	Kasday, Ullman, Wu	√	コンプトン偏極計と ^{64}Cu 源を利用
1976	Wilson, Lowe, Butt	√	コンプトン偏極計と ^{64}Cu 源を利用
1977	Bruno, d'Agostino, Maroni	√	コンプトン偏極計と ^{22}Na 源を利用

的には，与えられた直線偏極の光子を高い効率で透過させるのに，パイル・オブ・プレーツ検光子が用いられる．このタイプの検光子によると，偏極の直交成分は，透過しないことで検出される．2 チャンネル検光子が採用された唯一の実験は，Aspect, Grangier, and Roger (1982) による実験である．そこでは，方解石結晶を用いて直交する偏極の 2 つのビームに分け，それぞれに検出器が背後に置かれている．これらの光学的光子実験すべてにおいて，検出過程で用いられる光電子増倍管の効率は比較的低いし，さらに，角度相関の実験は，その性質上，すべての同時光子に対して鋭敏なのではない（カスケード遷

移は，原子の反跳のために，本質的には3体崩壊である）．この両方の理由のために，観測できるのは，光源から放出されるすべての光子対(つい)のあるサンプルにすぎない．そして，ベルの不等式の破れを評価するとき，現実に観測された対(つい)のサンプルが，その破れを説明するような仕方で偏ってはいないと仮定する必要がある．たとえば，検出過程は，検光子の「下流に」あるから，検出効率が偏極に依存する仕方について適当にアド・ホックな仮定をたてれば，ベルの不等式の破れを「局所的な」仕方で「説明」できるということは，別に驚くべきことではない．そのような「説明」は，光子を検光し検出するために用いる装置の機能に関する補助仮定によって排除されるべきである．そのような補助仮定を必要としない実験が考案できれば，素晴らしいことである．そのような実験は，Lo and Shimony（1981）によって示唆された．それは，準安定分子の2つの解離片の同時検出を採用している．そのような2体崩壊では，強い角度相関が得られ，シュテルン－ゲルラッハ分析器と電離検出器を用いると，原理的にはきわめて高い効率を達成することができる．これは，まったく可能な実験に思われるし，いままでの実験に含まれる「補助仮定」の逃げ道を除くために実行されるべきであることに疑いの余地はない．

しかしながら，いままで記述してきたすべての実験は，もう1つのより重要な問題を提起している．それらは**静的な**実験である――すなわち，分析器の設定は，粒子がその源から放出される前に選択し終わっているのである．分析器の設定が粒子源に「伝わって」この特定の設定で測定される相関に影響するという可能性が，原理的には存在する．第3章で導入した用語法では，これは，ベル局所性を破る例となるが，アインシュタイン局所性を破る例とはならないだろう．アインシュタイン局所性の破れをチェックするためには，光子カスケード型の実験では光子が光源を離れた後に検光子の設定を決定するような実験を工夫しなければならない．そのような実験は，アスペによって計画され，ついに1982年，アスペ－ダリバール－ロジェによって実行された．このアスペの実験では，「光学的な」スイッチないし交換器が各光子の道筋に導入され，異なる設定をされた2つの検光子のそれぞれに光子を振り分けることができるようにされた．その配置は図式的に図16に示してある．検光子の設定は，図9で示した理想化されたベルの実験での配置と一致するように，**a**，**a**′，**b**，**b**′の

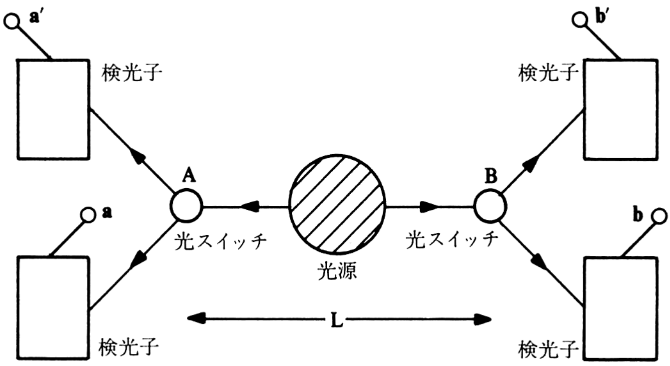


図 16　アスペによるベルの実験．A と B は検光子の対の一方に各光子を送る光スイッチで，設定は，**a**, **a**′, **b**, **b**′ で示されている．

記号がつけてある．スイッチは，光子が光源からの道筋の途中にある間に検光子の選択を変えるような頻度で切り換えられている．

光源 S と 2 つのスイッチ A と B に対する光円錐構造を，S，A，B すべてが静止している座標枠から眺めて，考えることにしよう．これは図 17 で図解してある．光源は 2 つの光子を時空点 s' において放出する．光子は時空位置 a と b においてスイッチに到達する．そのとき光源は s にある．スイッチ B の世界線の一部 $b'b$ は，s' を頂点とする光円錐の外部にある．同様に，スイッチ A の世界線の一部 $a'a$ も，s' を頂点とする光円錐の外部にある．

いくつかの数値をとり入れよう．アスペの実験で AB 間の距離 L は 12 メー

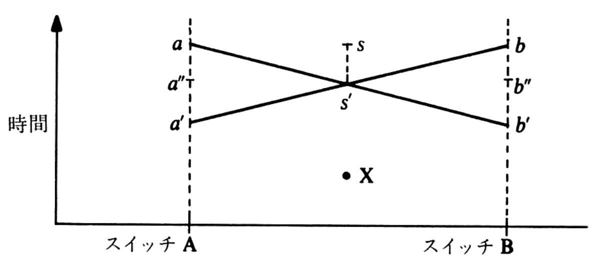


図 17　アスペの実験における光源 S と，2 つのスイッチ A と B に対する光円錐構造．詳細は本文を見よ．

トルである．よって，$a'a=b'b=40$ ナノ秒（1ナノ秒$=10^{-9}$秒）を計算するのはたやすい．さらに，$s's=20$ ナノ秒である．スイッチは，毎10ナノ秒ごとに設定を換えるようにつくられている．これは，光子が光源からスイッチに行くのにかかる時間（20ナノ秒）の半分である．したがって，スイッチは，確かに，光子が途中にいる間に，たとえば，s' の光円錐の外部の a'' や b'' において設定を換えるであろう．実際，以下の議論において，われわれは，a'' と b'' がそれぞれ a と b に先行する最後のスイッチ操作だと仮定する．明らかに，s' から a へ運動する光子は，つねに，b'' を頂点とする光円錐の外部にあり，同様に，s' から b へ運動する光子は，つねに，a'' を頂点とする光円錐の外部にある．言い換えると，a'' におけるスイッチ切り換えの事象が b へ運動している光子の偏極状態に影響したり，あるいは，b'' におけるスイッチ切り換えの事象が a へ運動している光子の偏極状態に影響するならば，それは，アインシュタイン局所性を破ることになるだろう．

カスケード遷移に含まれる放出現象が，実際は，およそ5ナノ秒の半減期をもっているから，s' における光源の位置がこの量だけ「ぼやける」ことに注意しておく価値はある．この時間が，頂点 s' の光円錐をスイッチ A と B のところで切断したときの外部領域の拡がり40ナノ秒に比べて小さいということは，上の議論にとって重要である．

アスペが考案した実験では，光スイッチは水を満たしたガラスの容器からなりたっており，そこに，定在超音波が，25メガヘルツの発振器と結びつけられた電気音響変換器によってつくられている．容器は可変な回折格子として作用する．定在波が最大に振れたとき，入射光子は波腹面でブラッグ反射される．¼周期後に定在波の振れがゼロになるとき，光子はブラッグ反射（回折）されずに容器を真っすぐに通りぬける．装置は図18に図解してある．実験において，ブラッグ角 θ_B は約 $1/4°$ であり，回折ビームの偏向角 $2\theta_B$ はだいたい $1/2°$ である．25メガヘルツの発振器によるスイッチ切り換え振動数は50メガヘルツになる，なぜなら，スイッチは音波振動数の2倍作用するからである．スイッチ切り換えの半周期，つまり，スイッチの2つの「方向」の間の時間間隔は，上に述べたように，10ナノ秒になる．

アスペの実験結果はベルの不等式を明確に破るものであった．したがって，

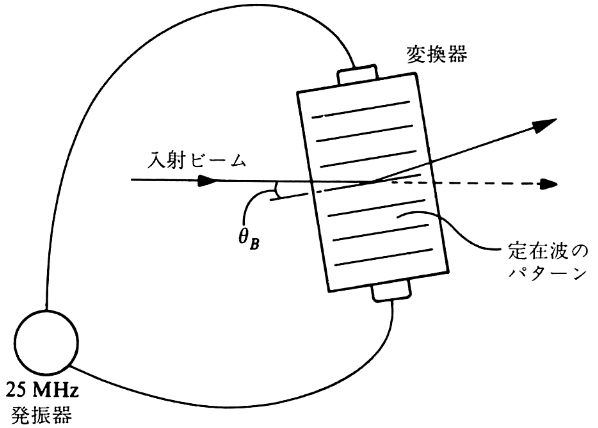


図 18　アスペの実験の光スイッチ.

一見したところでは，LOC_3 のアインシュタイン的言い換えの破れを示す重要な結果がここにある．しかしながら，注意すべき点が 2 つある．

1．2 つのスイッチは別々の独立の発振器によって作動しているけれども，スイッチが真にランダムな仕方で作用しているのでないことは明らかである．言い換えると，再び図 17 を引き合いにだすことにして，b' よりも前の装置の状態，つまり s' を頂点とする逆光円錐の内部にある状態が，b'' におけるスイッチ操作を決定する．よって，光子がスイッチに入るとき，b におけるスイッチ設定の知識は s' の逆光円錐内の位置で提供されており，したがって，アインシュタイン局所性を破ることなく s' に「伝える」ことができるだろう．同様のことが A スイッチにも成立する．

2．しかし，スイッチ操作をランダムにする試みがなされたとしても，それは，依然として存在論的決定主義と整合的であるだろう（先述の 100 頁の議論と比較せよ）．そして，b'' と s' をそれぞれ頂点とする逆光円錐が重なる領域におけるある事象 X が，b'' におけるスイッチ切り換えと s' における光源への効果の両方に対する原因となっており，よって，アインシュタイン局所性を破ることなく，b のスイッチの状態を光源の状態と関係づけるということも可能である．

この種の奇怪な可能性がアスペの実験におけるアインシュタイン局所性の破

れの証明を回避することを認めるけれども，状況はむしろ，補助仮定に関連して言及される状況に似ている．これらの仮定には，もちろん，ベルの実験においても頼らなければならない．デュエム的「良識」は，アインシュタイン局所性の破れに対するアスペの実験での証明を受け入れるべきだと命じる．違いは次の事実にある．「補助仮定」を必要としない実験は原理的には考案できるが，しかし，アインシュタイン局所性に対して，上で言及したタイプの擁護の仕方を排除できるいかなる実験も存在しないのである．

4.6　統計的非局所性

4.1節で，ベル型の実験から LOC_3 の破れ——ある位置でのくっきりした値，よって（FMを仮定すると）測定結果が，装置の遠く離れた部分の変更によって変えられうる——を主張するための条件を論じた．しかし，LOC_3 は，個別的な場合に生じることに関係している．ある位置で生じる測定結果の統計的頻度が，別の遠い位置で異なる種類の測定を行なうことによって変えられうるのか，という問題はまだ答えられずに残っている．この問題を扱うために，さらに，局所性のもう1つの意味を導入しよう：

LOC_5:

量子力学的オブザーバブルの測定結果の統計（相対頻度）は，遠く隔たってなされた測定によって変えることはできない．

測定結果の統計とは，統計アルゴリズムを介して量子力学の形式が答えをだすように作られている問題そのものであるが，LOC_5 が，この測定結果の統計なる語を用いて定式化されていることに注意しよう．もし LOC_5 が破れるならば，そのことが示すのは，最小道具主義解釈をともなった量子力学の形式そのものが，この形式に対するより包括的な解釈から独立に，非局所的特徴を示すということであろう．

したがって，LOC_5 がベル型の実験で破られていないことを確認しておくことは重要である．なぜ破られていないのかを見るために，式（3.2）で与えられた状態 $|\Psi_{singlet}\rangle$ において，粒子1の σ_{1z} を測定することに決めたとしよう．これが，粒子2になされる任意のスピン成分測定の統計にどのように影響する

かを考察しよう．われわれは，2.4 節で展開された理想的な測定理論を用いる．

σ_{1z} に対する測定装置を系 3 と名づける．装置の初状態を $|w_0(3)\rangle$ で表わし，終状態は，σ_{1z} の測定値が＋1 ならば $|w_+(3)\rangle$ で表わし，−1 ならば $|w_-(3)\rangle$ で表わす．

そうすると，全系 1，2，3 の状態は，測定前の

$$|\Psi_i\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha(1)\rangle|\beta(2)\rangle-|\beta(1)\rangle|\alpha(2)\rangle\right)|w_0(3)\rangle$$

から，測定後の

$$|\Psi_f\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha(1)\rangle|\beta(2)\rangle|w_+(3)\rangle-|\beta(1)\rangle|\alpha(2)\rangle|w_-(3)\rangle\right)$$

に移る．

フォン・ノイマンの統計作用素の言葉を用いると，2.4 節の議論から，粒子 2 のみに属する任意のオブザーバブルの測定に関して，$P_{|\Psi_i\rangle}$ は $\frac{1}{2}P_{|\alpha(2)\rangle}+\frac{1}{2}P_{|\beta(2)\rangle}$ のように振舞うことが導かれる（式（2.10）参照）．こうなる理由は，状態 $|\alpha(1)\rangle$ と $|\beta(1)\rangle$ の直交性にある．しかし，$P_{|\Psi_f\rangle}$ もまた，粒子 2 のみに属するオブザーバブルの測定に関して，$\frac{1}{2}P_{|\alpha(2)\rangle}+\frac{1}{2}P_{|\beta(2)\rangle}$ のように振舞うのである．その理由は，粒子 2 に対する任意の測定統計で生じる干渉項が，今度は，$|\alpha(1)\rangle$ と $|\beta(1)\rangle$ の直交性と，さらに $|w_+(3)\rangle$ と $|w_-(3)\rangle$ の直交性によって，2 度も「消される」からである．よって，粒子 2 のみに属する測定結果の統計は，粒子 1 について σ_{1z} を測定する装置に「掛かりきりになる」ことでは影響をうけない．この結果は，測定が結合系の終状態として**混合**状態をうみだすと仮定するならば，もちろんのこととして，成立する．

ここでは，もちろん測定の非選択的場面を問題にしている．たとえば，$\sigma_{2z}=+1$ の粒子 2 の部分集団を選択するならば，これは統計作用素 $P_{|\alpha(2)\rangle}$ で記述され，もちろん一般に，$\frac{1}{2}P_{|\alpha(2)\rangle}+\frac{1}{2}P_{|\beta(2)\rangle}$ とは異なる統計を与える．この選択は，$|\Psi_{\mathrm{singlet}}\rangle$ に組み込まれた鏡像相関を考慮して，σ_{1z} に対して得られた測定結果を知るならば実行可能になるだろう．しかしそのとき，選択は，遠く隔たってなんらかの「瞬間的な統計的効果」をもたらすためにはまずい位置で行なわれることになる．

その源から次々と放出される粒子について，一連の σ_{2z} の値を測定している

と想定しよう．値の系列は，＋－－＋－＋－＋＋－－－... のようになるだろう．ただし，＋と－の頻度の極限は ½ である．粒子1について，同時に，σ_{1z} の測定を実行するとしよう．後者によって，各粒子2を，$\sigma_{2z}=\pm1$ の値の略記法で，＋または－と「呼称する」ことができる．しかし，粒子2の位置における統計を変えるには，この呼称による情報はまずい場所にある．統計を変えるには，呼称情報を位置1から位置2に送達しなければならない．しかも，たとえば，粒子2のためのスピン・メーターにマイナス粒子が近づくたびに吸収膜を挿入し，プラス粒子が近づくたびにそれをとり除きなさい，といった指示書を付けなければならないだろう．この仕方で，明らかに，σ_{2z} の観測された測定結果の系列を，＋＋＋＋＋... に変えることになるだろう．しかし，この変化を生じさせるためには，情報を位置1から位置2に送達しなければならない．それは，単に，σ_{1z} の測定装置に「掛かりきりになる」ことでは不可能である．

問題を簡単な例で説明できる．私がオクスフォードで講義をしているとき，そこで聴いている学生たちには，ロンドンの私の研究室が空であることが，ただちに分かる．しかし，ロンドンに何か物理的変化を生じさせるためには，たとえば，ロンドンの学生が私の研究室のドアをノックしないようにするためには，私がオクスフォードに来ているという情報をロンドンに送り返さなければならない．

この議論の結論は，ベル型の実験で証明されたとされている非局所性を用いて2つの離れた位置の間で瞬間的に情報を送達することはできないということである．要するに，「ベル」の電話のようなものは存在しない．この点で，状況は，粒子1と2に関する作用素が可換でないときに生じる事柄とはまったく異なっている．そのような場合には LOC_5 が破られるだろう．しかし，EPR とベルの論証で証明された非局所性はこれよりも微妙である．特に，統計的効果が「遠く隔たって」送達されることはないという事実は，量子力学のアンサンブル解釈あるいは統計的解釈において非局所性の問題が生じないことを意味している．困難が明るみにでてくるのは，状態を個々の系に帰属させようと試みる文脈においてのみなのである．

われわれは，粒子1について測定を行なう相互作用の文脈で，しかも特定の量子力学的状態 $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ の場合に対して，信号送達不能という結果を論じてき

た．しかし実際，量子力学的相関を用いて信号を送達することができないことの一般的証明を，次の道筋に沿って与えることができる．

きわめて一般的に，ヒルベルト空間 $\mathbb{H}_A$ と $\mathbb{H}_B$ に結びつけられた 2 つの系 A と B を考えよう．C を，系 B と任意の仕方で相互作用する第 3 の系とし，ヒルベルト空間 $\mathbb{H}_C$ と結びつけよう．$\mathbb{H}_B \otimes \mathbb{H}_C$ を $\overline{\mathbb{H}_B}$ で表わし，a を $\mathbb{H}_A$ の任意のオブザーバブルとする．a は $\mathbb{H}_A \otimes \overline{\mathbb{H}_B}$ 上で $a \otimes I$ に拡張される．時刻 t における 3 つ組の系の任意の状態 $|\Psi(t)\rangle$ を考え，時間依存的オブザーバブル $a(t) \otimes I$ が状態 $|\Psi(t)\rangle$ において測定結果 λ を生じる確率を，$\mathrm{Prob}(\lambda)^{|\Psi(t)\rangle}_{a(t)\otimes I}$ で表わす．われわれはディラック描像（18 頁を見よ）で考えることにする．よって，摂動が与えられないとき $|\Psi(t)\rangle$ は一定である．他方，すべての場合において $a(t) \otimes I$ は摂動のないハミルトニアンに従って時間発展する．

さて，時間間隔（t，t'）において，$\overline{\mathbb{H}_B}$ の上に作用する時間発展ユニタリ作用素 $U_B(t, t')$ の作用によって，系 B に任意の仕方で摂動を与えるとする．

よって，時刻 t' において，3 つ組の系の状態は

$$|\Psi(t')\rangle = (I \otimes U_B(t, t'))\,|\Psi(t)\rangle \tag{60}$$

である．さて，

$$\mathrm{Prob}(\lambda)^{|\Psi(t')\rangle}_{a(t')\otimes I} = \mathrm{Prob}(\lambda)^{|\Psi(t)\rangle}_{a'(t')\otimes I} \tag{61}$$

を変形しよう．ただし $a'(t') \otimes I = (I \otimes U_B^{-1})(a(t') \otimes I)(I \otimes U_B)$ である．他方，

$$\begin{aligned} a'(t') \otimes I &= (I \otimes U_B^{-1})(a(t') \otimes I)(I \otimes U_B) \\ &= (I \otimes U_B^{-1})(a(t') \otimes U_B) \\ &= a(t') \otimes (U_B^{-1} U_B) = a(t') \otimes I \end{aligned} \tag{62}$$

よって，

$$\mathrm{Prob}(\lambda)^{|\Psi(t')\rangle}_{a(t')\otimes I} = \mathrm{Prob}(\lambda)^{|\Psi(t)\rangle}_{a(t')\otimes I} \tag{63}$$

しかし，この等式の右辺は，摂動が与えられないときに時刻 t' において A について a を測定して結果 λ を見出す確率である．なぜなら，このとき t' における状態ベクトルは，t における状態ベクトルと同じだからである．

言い換えると，任意の時刻 t' において A について a を測定して結果 λ を得る確率は，t と t' の間に B に与えられる任意の可能な摂動から独立である．

4.7 結論の要約

われわれは，量子力学の解釈に対する3つの立場を区別し A，B，C と名づけ，また，局所性の5つの意味：LOC_1，LOC_2，LOC_3，LOC_4，LOC_5 を区別した．いま，「量子力学は局所性の破れを予測するか」という問いに簡単な表の形で答えることができる．この表では，3つの解釈のそれぞれにおいて，局所

見解	LOC_1	LOC_2	LOC_3	LOC_4	LOC_5
A	√	√	×	×	√
B	×	√	√	√	√
C	√	×	√	√	√

性のどの意味が破られているか（×で表わす）が示されている．√は，その局所性の意味が破られていないことを表わしている．

注と参考文献

この章で扱われた題材のほとんどは Redhead (1983) にもとづいている．

ベルの不等式のもとの証明は Bell (1964) で与えられた．そこでは，決定主義的な隠れた変数の枠組みが用いられ，2つのスピン・メーターが平行なスピン成分を測定したときの完全な反相関が仮定された．これらの制限は Bell (1971) で緩和された．Clauser and Horne (1974) をも見よ．それに替わる興味のある手法は Wigner (1970) で提供された．4.2節で論じたベルの不等式に対するスタップ－エバーハードの方法は Stapp (1971) に始まり，Eberhard (1977) で展開された．エバーハードの論文の数学は，解釈は別にして，Peres (1978) と Brody (1980) による改良を加えて4.1節で用いてある．Peres and Zurek (1982) をも見よ．

反事実的事象の議論については，特に Lewis (1973)，Slote (1978)，Lewis (1979)，Bowie (1979) を見よ．本文で論じた結論と反対の結論に至る論法については Thomason and Gupta (1980) を見よ．このテーマについての役にたつリプリント集は Harper *et al.* (1981) で与えられている．われわれ自身の扱いは，Lewis (1973) を簡単にしたものに基づいている．決定主義的場合のベルの不等式に含まれる仮定のいくつかに対する批判については，特に Fine (1974) と (1979)，

Brody and de la Peña-Auerbach (1979) と Brody (1980) を見よ.

確率的隠れた変数理論と，局所性と因子分解可能性の関連は，Clauser and Horne (1974), Selleri and Tarozzi (1980), Fine (1981), Shimony (1981), Hellman (1982), Jarret (1984), Shimony (1984) で論じられている.「遠隔感応」なる語はシモニーによる. 1重項状態の非ロバストネスは Redhead (1986) で初めて分析された. 因果的連結性に対するマーク基準 (mark criterion) については，Reichenbach (1928) と (1956), Salmon (1984) を見よ. 本文で与えた不等式 (42) の証明は，Clauser and Horne (1974), Appendix A で見ることができる. 因子分解可能性と結びついた厳密相関が決定主義を導くという事実は，Suppes and Zanotti (1976) によって初めて指摘された.

Fine (1982a) と (1982b) はベルの不等式の興味ある数学的性質を証明した. つまり，ベルの不等式は，非両立的オブザーバブルも含めてすべてのオブザーバブルに対して結合分布が存在するための十分条件である，という性質である. ベルの不等式は非両立オブザーバブルの結合分布を仮定しなくても導けるという本章でなされた主張と，ファインの証明が，事実，矛盾しないことは，Redhead (1990) と Svetlichny *et al.* (1988) で論証された. ここでの基本点は，ファインの定理が，ベルの不等式を満たす統計の数学的モデルにおいて，結合分布の存在を証明していることである. しかし，このモデルは，現実の世界で生じる頻度を反映していない.

ベルの不等式をテストするために考案された実験の包括的な概説は，Clauser and Shimony (1978) と Pipkin (1978) が提供している. アスペと共同研究者のより最近の仕事についての文献は，Aspect, Grangier, and Roger (1981) と (1982), さらに Aspect, Dalibard, and Roger (1982) である. ペリーその他のごく最近の実験は，Perrie *et al.* (1985) に提示されている. アスペの実験で用いられた補助仮定は，特に Marshall *et al.* (1983) によって批判されている. ロー－シモニー実験は，Lo and Shimony (1981) においてきわめて詳細に論じられている.

量子力学において LOC_5 が破られないことの一般的証明については，Eberhard (1978), Ghirardi *et al.* (1980), Page (1982), Shimony (1984) を見よ. きわめて簡潔でエレガントな証明は Jordan (1983) によっても提出されている. 本文で与えた証明は Redhead (1986) にしたがっている.

ベルの不等式の量子力学的な破れがけっして $2\sqrt{2}$ をこえないことを示すことができる. エレガントな証明については Landau (1987) を見よ.

本章で扱ったテーマについての最近の概観はD'Espagnat（1984）が提供している．

量子力学の解釈に関するベルの論文を集めたものがBell（1987）で提供されている．

5 コッヘン－シュペッカーのパラドクス

2.1節で見解Aとして記述した量子力学の解釈は，2つの部分をもっている：

1. すべての状態において，すべてのオブザーバブルに値をわり当てることは可能である．
2. これらのわり当てられた値の統計は，量子力学の統計アルゴリズムを適用した 結果と一致しなければならない．

前章で論じたベルの不等式の破れは，局所性の制約のもとで（2）を満たすことができないことに関係している．しかしこれまで，（1）自体はなにも問題を生じないと仮定してきた．コッヘン－シュペッカーのパラドクスは，この前段階（1）においてさえも代数的な矛盾が生じることに関係している．

そのような問題はどのようにして生じうるのだろうか．われわれに次のことが求められたと想定しよう．つまり，ヒルベルト空間のいくつかの自己共役作用素のリストを作り，対応するオブザーバブルの所有値として実数をわり当てるように求められたとする．それを実行するのはきわめて簡単に思われるだろう．表2の［Q］のところを埋めていけばよい．

困難が生じてくるのは，［Q］の可能な値にある制限を導入するときである．

表 2　量子力学的オブザーバブルに対する値のわり当て

作用素	オブザーバブル	値のわり当て［Q］
$\hat{Q}_1$	Q_1	α_1
$\hat{Q}_2$	Q_2	α_2
$\hat{Q}_3$	Q_3	α_3
.	.	.
.	.	.

われわれは，すでに，**忠実な測定の原理**（FM）を導入した（99頁）．これは，Q の測定結果が所有値［Q］を明らかにすると述べている．FM があるから，次の

値の規則（VR）：$\mathrm{Prob}(\lambda)_Q^{|\phi\rangle}=0\rightarrow[Q]^{|\phi\rangle}\neq\lambda$

をたてよう．VR の背後にある考えはこうである．状態 $|\phi\rangle$ において測定によって λ が生じる量子力学的確率がゼロならば，λ は状態 $|\phi\rangle$ における Q の所有値でありえないというのである．明らかに，VR は FM の論理的帰結ではない．FM から VR を演繹するためには次の付加的仮定を必要とする：(1) 測定値と所有値の確率分布が同一であること；(2) Q が値 λ を所有する確率がゼロならば［Q］は λ に等しくなりえないこと．しかしながら，測定が明らかにするのはつねに所有値であるにもかかわらず，測定をくり返しても，すべての所有値をゼロでない確率で測定値にすることができないならば，これは，自然の側に所有値を隠そうとする明確な陰謀があることの証明となるだろう．しかし，このような陰謀を認めないのであるならば，実際，FM は VR を正当化すると見なせるだろう．

われわれが，とにかく FM と量子化アルゴリズムから知っている結果を，VR から容易に得ることができる．

スペクトル規則：

離散的スペクトルをもつオブザーバブルに対して，［Q］の可能な値は，対応する作用素 $\hat{Q}$ の固有値に限られる．

しかし，VR が連続スペクトルの作用素に対しては意味をなさないことに，慎重な注意を払っておこう．というのは，連続スペクトルはそのような作用素がくっきりした値をまったく所有しないことを含意するからである．後に VR を適用するときは，つねに有限次元の場合を扱う．その場合には VR は明らかに合理的である．

VR のもう1つの帰結は，

固有ベクトルの規則：$[Q]^{|q_i\rangle}=q_i$

である．これは，第3章ですでに，アインシュタインの実在性基準として導入された（式3.1参照）．ここではそれを VR から導いた．

VRが値のわり当てに重要な制約をもたらしていることは明らかであるが，そこからパラドクス的な矛盾が生じるわけではない．しかしながら，Kochen and Specker（1967）に従い，値のわり当てに対して次の原理として知られている制約を導入すると，不幸な状況が生じる．

関数的合成の原理（FUNC）：

$\hat{A}$ と $\hat{B}$ が，オブザーバブル A と B に対応する2つの自己共役作用素であって，$\hat{B}=f(\hat{A})$ なる関数 f が存在するならば，任意の状態 $|\phi\rangle$ に対して $[B]^{|\phi\rangle}=f([A]^{|\phi\rangle})$．

FUNCの別の表現は，

$$[f(A)]^{|\phi\rangle}=f([A]^{|\phi\rangle}) \tag{1}$$

である．ただし，$f(A)$ は，自己共役作用素 $f(A)$ に対応するオブザーバブルを表わす．

本質的に，FUNCの考えは，作用素の代数的構造がオブザーバブルの所有値の代数的構造に写されるということである．少しのちに，FUNCの正当化を考察するが，まず，次のことを示そう．状態ベクトルのヒルベルト空間の次元が2より大きいときにFUNCによって値のわり当てを制約するならば，矛盾が帰結する．これが，**コッヘン‐シュペッカーのパラドクス**として知られているものである．

5.1　矛盾の証明

FUNCからある帰結を導くことから始めよう．その名称は次の通りである．

和の規則：

$\hat{A}$ と $\hat{B}$ が可換ならば，任意の状態 $|\phi\rangle$ に対して，

$$[A+B]^{|\phi\rangle}=[A]^{|\phi\rangle}+[B]^{|\phi\rangle}$$

ただし，$A+B$ は自己共役作用素 $\hat{A}+\hat{B}$ に対応するオブザーバブルである．

証明：1.3節ですでに見たように，$\hat{A}$ と $\hat{B}$ が可換ならば，適当な関数 f と g に対して，

$$\hat{A}=f(\hat{O})$$
$$\hat{B}=g(\hat{O})$$

なる極大作用素 $\hat{O}$ が存在する．

よって，$h=f+g$ として，

$$\hat{A}+\hat{B}=h(\hat{O})$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}[A+B]^{|\phi\rangle} &= h([O]^{|\phi\rangle}) \quad (\text{FUNC を用いて}) \\ &= f([O]^{|\phi\rangle})+g([O]^{|\phi\rangle}) \\ &= [f(O)]^{|\phi\rangle}+[g(O)]^{|\phi\rangle} \quad (\text{FUNC を用いて}) \\ &= [A]^{|\phi\rangle}+[B]^{|\phi\rangle} \quad (\text{証明終わり})\end{aligned}$$

Fine and Teller (1977)が示したことに注意することも興味深い．つまり，**和の規則**と**値の規則**を前提すると，離散的スペクトルのオブザーバブルに適用されるFUNCが導かれるというのである．また，上の論証に簡単な調節をして，**和の規則**を可算無限個の項の和に拡張できる．さて，任意の可分なヒルベルト空間を考え，固有値の純粋に離散的なスペクトルをもつ極大自己共役作用素をとる．そのスペクトル展開は，

$$\hat{Q}=q_1\hat{P}_1+q_2\hat{P}_2+q_3\hat{P}_3+\ldots \tag{1}$$

と書ける．これらの射影作用素はどれでも，たとえば $\hat{P}_k$ は，$\hat{Q}$ の関数として

$$\hat{P}_k=\chi_{q_k}(\hat{Q}) \tag{2}$$

と書けることを知っている．ただし，特性関数 χ_{q_k}: $\{q_i\}\rightarrow\{0, 1\}$，$\chi_{q_k}(q_i)=\delta_{ik}$ で定義される．

オブザーバブルの言葉を用いると，P_k を測定する1つの方法は，Q を測定し，その結果に関数 χ_{q_k} を適用することである．すなわち，P_k が測定値1をとるのは，Q が測定値 q_k をとるとき，かつ，そのときにかぎるのである．しかし，1.3節の議論から，これが P_k を測定する唯一の方法でないことも知っている．というのは，P_k は，Q と両立しない他の極大オブザーバブルの関数としても表現できるからである．われわれは，しばらくの間，これら測定値のすべてがいま考えている状態 $|\phi\rangle$ における同一の所有値 $[P_k]^{|\phi\rangle}$ に対応していると仮定しよう．

さて，われわれは，$\{\hat{P}_i\}$ が

$$\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3+\ldots=\hat{I} \tag{3}$$

の意味で，単位の分解を与えることを知っている．和の規則（一般に，可算無

限和であるが）を適用して，

$$[P_1]^{|\phi\rangle}+[P_2]^{|\phi\rangle}+[P_3]^{|\phi\rangle}+\ldots=[I]^{|\phi\rangle} \tag{4}$$

を得る．さて，FUNC を適用すると，［P_k］の可能な値が何であるか分かる．

$$\hat{P}_k^2=\hat{P}_k$$

であるから，FUNC によって，

$$([P_k]^{|\phi\rangle})^2=[P_k]^{|\phi\rangle}$$

よって $$[P_k]^{|\phi\rangle}([P_k]^{|\phi\rangle}-1)=0$$

したがって

$$[P_k]^{|\phi\rangle}=0 \text{ または } 1 \tag{5}$$

P_k の固有値は 0 と 1 だけであるから，この結果はスペクトル規則からも導かれる．しかしいま，われわれは，FUNC のみを用いてどれだけのことが得られるかを見ることに関心がある．$[I]^{|\phi\rangle}$ の値は何か．スペクトル規則は，$\hat{I}$ の固有値 1 でなければならないと教える．しかし再び，われわれはこれを，FUNC から，次の**積の規則**を介して形式的に導くことができる．

積の規則：
　$\hat{A}$ と $\hat{B}$ が可換ならば，

$$[AB]^{|\phi\rangle}=[A]^{|\phi\rangle}\cdot[B]^{|\phi\rangle}$$

　ただし，AB は（自己共役）作用素 $\hat{A}\hat{B}$ に対応するオブザーバブルである．

積の規則の証明は，**和の規則**のときと同じような道筋にそって，ただちに与えられる．したがって，細部はくり返さない．

　任意の状態 $|\phi\rangle$ に対して，$[Q]^{|\phi\rangle}\neq 0$ なるオブザーバブル Q をつねに選ぶことができるという，もっともな仮定をしよう．このとき，

$$[Q]^{|\phi\rangle}=[I\cdot Q]^{|\phi\rangle}=[I]^{|\phi\rangle}\cdot[Q]^{|\phi\rangle}$$

よって，

$$[I]^{|\phi\rangle}=1 \tag{6}$$

（5）と（6）から，（4）が次の制限を課すことは容易に分かる：

　数［P_k］$^{|\phi\rangle}$ の 1 つ以外はすべてゼロであり，その残された 1 つの値は 1 である．

これは，ヒルベルト空間における単位の分解を与える正射影作用素のすべての可能な集合に対して適用されなければならない．射影作用素はヒルベルト空間の射線と1対1対応にあるから，上の制限は，ヒルベルト空間における単位ベクトルのすべての完備な直交系〔正規直交基底〕それぞれにおいて，その基底の，1つのベクトルには数1を，他のベクトルには0を与える，という操作が整合的に可能でなければならない．

この問題をヒルベルト空間における単位超球面の色づけ問題に翻訳するのが，便利である．この超球面を，次の条件が満足されるように，赤と青の2色で色づけできるだろうか．

1. すべての点（単位ベクトル）は，赤または青で色づけられる．
2. 単位ベクトルのすべての完備な直交系において，1つの単位ベクトルのみが赤で色づけられる．
3. 同一の射線に属する単位ベクトルは，同じ色をもつ．

さて，次のように呼ぶ定理の証明に進もう．

2色定理：

ヒルベルト空間の次元が2よりも大きいならば，単位超球の，上に記述したような色づけは，可能では**ない**．

有限次元Nの実（複素）ヒルベルト空間における2色定理を$T_N^{実(複素)}$で表わし，無限次元可分ヒルベルト空間におけるものを$T_\infty^{実(複素)}$で表わそう．

ただちに，

$$T_N^{実} \to T_{N+1}^{実} \tag{7}$$

が分かる．これは次のようにすればでてくる．$(N+1)$次元の場合に色づけが可能だと仮定し（すなわち$\sim(T_{N+1}^{実})$），青に色づけされた任意の方向に対するN次元直交部分空間を考える．ここから，定理の指示に合致した部分空間における超球の色づけが得られる．よって，

$$\sim(T_{N+1}^{実}) \to \sim(T_N^{実})$$

あるいは，対偶をとって（7）である．

（7）をくり返し適用して，もし，任意に与えられたNに対して$T_N^{実}$が証明できたならば，Nよりも大きな任意の値に対しても定理は真となることが示され

る．実際，同様な論証で $T^{実}_{\infty}$ も導かれる．この場合には，無限次元の場合に色づけが可能だと仮定して，赤に色づけされた方向を含む有限次元部分空間で，色づけ可能になることを示す．

さらに，有限あるいは無限の任意の次元に対して，

$$T^{実} \to T^{複素} \tag{8}$$

である．なぜなら，いま複素数体上のヒルベルト空間において，単位超球の色づけができたとする．この複素ヒルベルト空間において，単位ベクトルのある完備な直交系をとる．この正規直交基底から実直交変換によって得られるすべての直交系を考えることによって，実ヒルベルト空間と同形な構造を生成することができ，同じ次元の実ヒルベルト空間に対して色づけ可能であることを示すことができる．

これらの結果を頭に入れて，なすべきことは，N の小さな値に対して $T^{実}_{N}$ を検討することである．$T^{実}_{2}$ が偽であることに注意しよう．これは，実ユークリッド平面における単位円の色づけに対応する．そのような色づけの構成は，図19に図解してある．半開4分円が，指示されているように交互に青と赤に色づけされている．任意の直交する方向対(つい)に対して，実際，1つは赤に色づけられ他方は青に色づけられ，方向の両端は同じ色になっている．

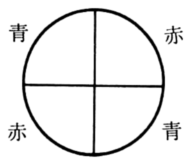


図 19　2次元の場合に2色定理が成立しないことの証明．

さて，$T^{実}_{3}$ が成立することを示そう．まず，ベリンファンテによるもっともに思える論証を与えよう．ユークリッド的3次元ベクトル空間における単位球を考える．色づけが実行できたと仮定しよう．そうすると，球面の 1/3 は赤に色づけされ，2/3 は青に色づけされることになるだろう．なぜなら，すべての直交する方向の3つ組に対して，1つは赤に色づけられ，残りの2つは青だからである．しかし，たとえば，点 P に赤をぬるたびに，P を極とする赤道全体に青をぬらなければならない．なぜなら，P に直交するすべての方向は，青に

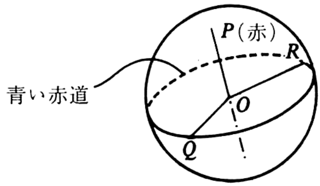


図 20　3次元実ヒルベルト空間に対する**2色定理**のベリンファンテの証明．O は単位球の中心であり，P, Q, R は互いに直交する方向の3つ組である．P は赤に色づけられる．この3つ組を OP のまわりに回転すると，Q と R は青い赤道上をひとまわりする．

色づけされなければならないからである．これは，図20に図解してある．PQR は，直交する方向の1つの3つ組である．よって，P が赤ならば，Q と R は青でなければならない．この直交3つ組を OP のまわりに回転すると，図に示すように，青色の赤道全体をひとまわりすることになる．よって，それぞれ1個の赤点に対応する青点が〔赤点を極とする〕赤道上に無限個存在することになるから，十分な個数〔全体の ⅓〕の点に赤をぬって操作を終えることができないように思われる．もちろん，この論証はまったく厳密でない．なぜなら，赤道〔大円〕上の各青点が無限に多くの他の赤道〔大円〕の上にものっていることを思い出すと，多くの2重数えを行なっていることが分かるからである．

さて，コッヘンとシュペッカーによる巧妙な議論を用いて，$T_3^{実}$ の厳密な証明を与えよう．

最初に，次の命題を証明する．

補題：

異なる色の任意の2点の間にゼロでない角距離が存在する．

より具体的に述べると，O を中心とする球面上の任意の2点を1，2とし，単位ベクトル $\overrightarrow{O1}$ と $\overrightarrow{O2}$ の角を θ_{12} で表わすと，もし $0 \leqq \theta_{12} \leqq \sin^{-1}(1/3)$ ならば，点1と2に異なる色をわり当てることができないということを示そう．

証明：まず，コッヘン－シュペッカー図によって，球面上の点とそれらの直交関係に対する表現法を導入しよう．この図において，球面上の点を図の頂点で表わし，2点が互いに直交する方向にあるならば，図の対応する頂点を直

線で結ぶ．$0 \leqq \theta_{12} \leqq \sin^{-1}(1/3)$ ならば，次のコッヘン－シュペッカー図が構成できることを示そう（図21）．

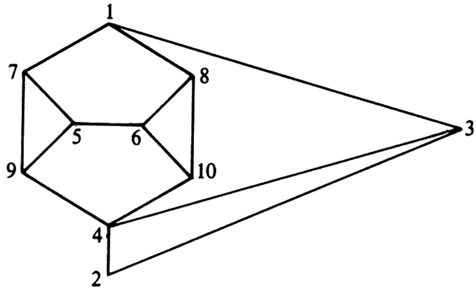


図 21 3次元ユークリッド空間の単位球面上の10点に対するコッヘン－シュペッカー図．これは，$0 \leqq \theta_{12} \leqq \sin^{-1}(1/3)$ のとき，構成可能である．

まず，θ_{12} が任意の鋭角であると仮定する．〔図において〕3は1と2に直交し，4も3に直交しているから，$\overrightarrow{O4}$ は $\overrightarrow{O1}$ と $\overrightarrow{O2}$ が定める平面上になければならない．$\overrightarrow{O4}$ は $\overrightarrow{O2}$ に直交するから，θ_{14} も鋭角になるように4を選ぶことができ，図22に描かれているように，明らかに，$\theta_{14} = \pi/2 - \theta_{12}$ である．

$\overrightarrow{O5} = \mathbf{i}$，$\overrightarrow{O6} = \mathbf{k}$ と書き，$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ が正規直交基底をなすように単位ベクトル $\mathbf{j}$ をとる．

そうすると，$\overrightarrow{O7}$ は $\mathbf{i}$ に直交しなければならないから，ある実数 x に対して，

$$\overrightarrow{O7} = (\mathbf{j} + x\mathbf{k})(1 + x^2)^{-1/2}$$

と書かれる．同様に，ある実数 y に対して，

$$\overrightarrow{O8} = (\mathbf{i} + y\mathbf{j})(1 + y^2)^{-1/2}$$

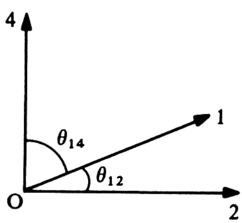


図 22 図21で示されたコッヘン－シュペッカー図の構成可能性証明における角 θ_{14} と θ_{12} の選択．O は単位球の中心である．

となる．

図の直交関係から，

$$\overrightarrow{\mathrm{O9}}=(x\mathbf{j}-\mathbf{k})(1+x^2)^{-1/2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{O10}}=(y\mathbf{i}-\mathbf{j})(1+y^2)^{-1/2}$$

でなければならない．しかし，$\overrightarrow{\mathrm{O1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{O7}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{O8}}$ に直交するから，

$$\overrightarrow{\mathrm{O1}}=(xy\mathbf{i}-x\mathbf{j}+\mathbf{k})(1+x^2+x^2y^2)^{-1/2}$$

でなければならない．また，$\overrightarrow{\mathrm{O4}}$ も $\overrightarrow{\mathrm{O9}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{O10}}$ に直交するから，

$$\overrightarrow{\mathrm{O4}}=(\mathbf{i}+y\mathbf{j}+xy\mathbf{k})(1+y^2+x^2y^2)^{-1/2}$$

でなければならない．しかしここで，$\overrightarrow{\mathrm{O1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{O4}}$ の内積をとると，ただちに，

$$\cos\theta_{14}=\frac{xy}{((1+x^2+x^2y^2)(1+y^2+x^2y^2))^{1/2}}$$

が得られ，よって，

$$\sin\theta_{12}=\frac{xy}{((1+x^2+x^2y^2)(1+y^2+x^2y^2))^{1/2}} \qquad (9)$$

となる．式（9）が，$x=y=\pm1$ に対して，最大値 $1/3$ をとることは容易に分かる．

よって，コッヘン－シュペッカー図は，$0\leqq\theta_{12}\leqq\sin^{-1}(1/3)$ のとき，構成可能である．〔$0\leqq\theta_{12}\leqq\sin^{-1}(1/3)$ が十分条件になっていることを見るには，この条件を満たす θ_{12} が与えられたときに，(9) により x，y を定め，任意に正規直交基底 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ を選ぶと，本文の式より，球面上の点 1，4，5，...，10 が定まるから，1，4 から図 22 のように 2 を定め，最後に，1，2 に直交するように 3 をとる，と考えればよい．もともと球面上に 1，2 が与えられている場合には，いま述べたようにして構成された点 1，...，10 の全体を回転して，この 1，2 をもとの与えられた点 1，2 に重ねればよい．〕

さて，色写像 $V:S\to$ {赤，青} を考える．定義域は単位球面 S である．$V(1)=$赤，$V(2)=$青と仮定すると，図 21 のコッヘン－シュペッカー図から，

$$V(1)=\text{赤}\to V(7)=V(8)=V(3)=\text{青}$$

しかし，$V(2)=$青だから，

$$V(4)=\text{赤}$$

よって，

$$V(9)=V(10)=青$$

しかし，

$$V(7)=V(9)=青 \to V(5)=赤$$

$$V(8)=V(10)=青 \to V(6)=赤$$

しかし，$V(5)=V(6)=$赤は不可能である．なぜなら，5 と 6 は互いに直交する方向だからである．

したがって，結論はこうなる．異なる色の点の間の角距離には最小値があり，その値は，確かに，$\sin^{-1}(1/3)$ より大である．さもないと，上の矛盾が導かれる．

この補題を用いて $T^{実}_{3}$ を証明するまったく異なる方法が 2 つある．

1 つは，Bell（1966）による考えに基づいている．1.5 節で，実は，赤を 1 とし青を 0 として確率測度の形で，色写像 V をすでに論じたのである．そこでは，異なる値（すなわち，色）を与えられる点の間に角距離の最小値は存在しないことが示された．よって，論証はこうなる．

$\sim(T^{実}_{3}) \to$(異なる色が与えられる点の間の最小角距離が存在する).

しかし，異なる色が与えられる点の間の最小角距離は存在しない．

$$\therefore \quad T^{実}_{3}$$

グリーソンの定理との結びつきは，もう明らかである．もし $T^{実}_{3}$ で禁じられる色づけが可能ならば，ユークリッド的 3 次元ベクトル空間の射影束の上に，不連続な確率測度を定義することができるだろう．しかし，グリーソンの定理は，この場合において不連続な測度が存在しないことを示している．よって，色づけは，それが球の位相（より具体的には，1.5 節ですでに与えた議論が示すように，球の連結性）と矛盾するという意味で，不可能である．よって，$T^{実}_{3}$ はグリーソンの定理の簡単な系として導かれる．

さて，$T^{実}_{3}$ において考えられた色づけが不可能であることを，補題を用いて証明する第 2 の，まったく別の方法に向かおう．$\theta_{12}=18° < \sin^{-1}(1/3)$ をとると仮定すると，$V(1)=$赤 $\to$ V(2)=赤なることを知っている．さて，図 23 に示すように，点 1 と 2 を通る赤道〔大円〕に沿って，18° の間隔でさらに 4 点を導入し，3, 4, 5, 6 と名づける．よって，上の論証をくり返して，

$$V(1)=赤 \to V(2)=赤 \to V(3)=赤 \to V(4)=赤 \to V(5)=赤 \to V(6)=赤$$

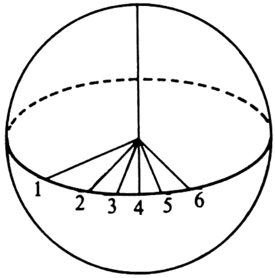


図 23　1, 2, 3, 4, 5, 6 は，単位球の赤道に沿って 18° ずつの間隔で並んだ 6 個の点である．したがって，1 と 6 は直交する．本文では，1 が赤に色づけされるならば，6 もそうでなければならないことが示されている．

しかし，$\theta_{16}=5\times18°=90°$．よって，球面上に赤色の点が存在すれば，直交する 2 つの赤点の存在が証明された．これは色づけの指定条件と矛盾する．しかし，球面上の任意の直交する 3 点を考えると，そのうちの 1 つは赤に色づけられなければならない．したがって，色づけは可能ではない．すなわち，われわれは $T_3^{実}$ を証明した．

実際，この論証すべてを，指定された仕方で色づけできない有限個の頂点のコッヘン－シュペッカー図の形にまとめることができる．そのためには，3 つの任意の直交点 p_0，q_0，r_0 を選び，3 角形 $p_0q_0r_0$ の頂点の各対の間に，$\theta_{12}=18°$ として，図 21 に示したような図を適切に 5 回くり返して挿入すればよい．その結果得られる「不能」コッヘン－シュペッカー図，すなわち，色づけできない図の美しい例は，図 24 に示されている．a は r_0 と q_0 に直交し，p_0 もそうであるから，a を p_0 と一致するように選ぶことができることに注意しよう．同様に，b を q_0 と，c を r_0 と同一視できる．よって，図の頂点の全体は，15 個の 6 角形それぞれにおける 8 個の頂点から，3 対の頂点を同一視して，$(8\times15)-3=117$ 個の異なる頂点からなっている．

言い換えると，図 24 で証明されているのは，単位球上の 117 個の点を，そこに示される直交関係をもつように構成することはできるが，指定されたように色づけすることはできないということである．よって再び，われわれは $T_3^{実}$ を証明した．後者の証明法は，コッヘンとシュペッカー自身が採用したものであり，彼らが初めて図 24 の見事な「あやとり模様」を作ったのである．彼ら

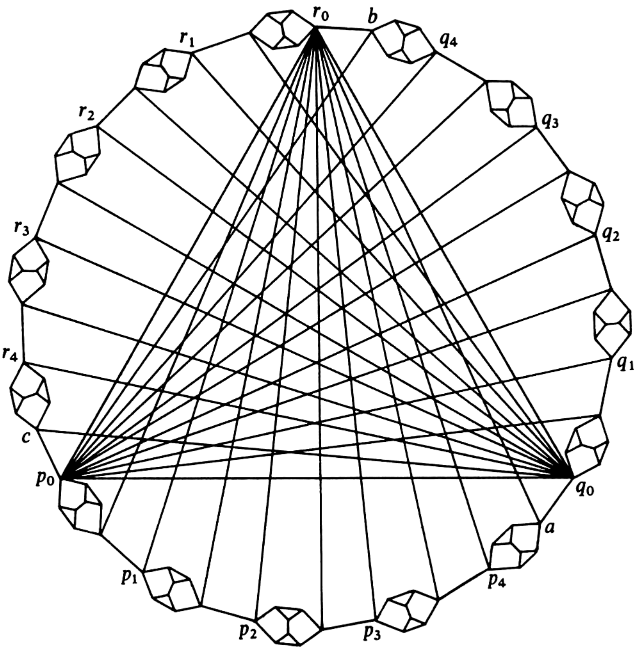


図 24　3次元ユークリッド空間において矛盾するコッヘン－シュペッカー図.

の手法の利点は，少ない有限個数のオブザーバブルのみを扱うことにある．これらのオブザーバブルは1次元射影作用素に対応し，これらの作用素の値域に，コッヘン－シュペッカー構成で示される117個の単位ベクトルが含まれている．もとの論文でコッヘンとシュペッカーが考察したのは，3次元ヒルベルト空間で記述されるスピン1の系に対する射影作用素であり，これらは，われわれが用いた1次元射影作用素ではなくて2次元の値域をもつものであったことに注意しておこう．実際，彼らが考察しているのは作用素S_x^2，S_y^2，S_z^2であり，これらは，スピン1の系の角運動量の，任意の直交軸OX，OY，OZに沿って分解した成分の2乗であり，これらの軸をさまざまな向きで考えている．式(1.99)を参照すれば，これらの作用素と1次元射影作用素との結びつきが分かるだろう．S_x^2，S_y^2，S_z^2を用いると，値をわり当てる問題が，式

$$[S_x^2]^{|\phi\rangle}+[S_y^2]^{|\phi\rangle}+[S_z^2\,]^{|\phi\rangle}=2 \tag{10}$$

を解くことに還元されるのは明らかである．ここでも，わり当てられる値は，再び，0か1である．

式（10）は，われわれの先の議論の式（4）に替わるものである．しかし，（10）の解は，今度は，軸OX，OY，OZの任意の向きに対して，3つの量$[S_x^2]^{|\phi\rangle}$，$[S_y^2]^{|\phi\rangle}$，$[S_z^2]^{|\phi\rangle}$のうち2つが値1をとり，残りの1つが値0をとることを要求する．しかし，これは，同一視の仕方をちょっと変えて赤を0とし青を1とするならば，先に考察したのと同じ色づけ問題になる．

S_x^2, S_y^2, S_z^2を，式（1.92）で導入したスピン・ハミルトニアンH_sの関数として表現する仕方をすでに示してある．これらの関数の具体的な形は，式(1.96), (1.97), (1.98）に与えてある．これらの結果は，最低の3重項状態にあるオルトヘリウム原子の場合に，S_x^2, S_y^2, S_z^2を測定する明確な方法を提供している．これはスピン1の系であり，コッヘンとシュペッカーは，スピン・ハミルトニアンH_sが原子を菱形対称の弱い電場に置いたときに生じる摂動であることを注意した．よって，電場がかけられたときのエネルギー準位における変化を調べることによってH_sを測定できる．したがって，S_x^2，S_y^2，S_z^2の測定は，式（1.96), (1.97), (1.98）で示した関数を，H_sに対する測定結果に適用することからなる．たとえば，H_sに対する測定結果が$a+b$ならばS_x^2とS_y^2に対する値はそれぞれ1でありS_z^2の値は0である，等々，と推論できる．

2より大きな次元の任意のヒルベルト空間に対して，コッヘン－シュペッカーのパラドクスを証明したから，次に，矛盾を生みだした値のわり当てに対する制約，FUNCの身分の考察に向かうことにしよう．

5.2　FUNCの正当化

FUNCと，第1章でSTAT FUNCと名づけた量子力学の定理（式（1.48）を見よ）との関係を考察することから始めよう．STAT FUNCが

$$\mathrm{Prob}(\Delta)_{f(Q)}^{|\phi\rangle}=\mathrm{Prob}(f^{-1}(\Delta))_{Q}^{|\phi\rangle} \tag{11}$$

と述べていることを思い出そう．ただし，純粋状態$|\phi\rangle$の場合を考えている．

これを，次のように**解釈**しよう．つまり，これらは，与えられた量子力学的状態$|\phi\rangle$においてオブザーバブルの**所有**値が指示された領域に存在する長期の頻度について述べていると解釈する．われわれが論じたように，このように

解釈することはFMによってもっともなものとなる．(11) を

$$\mathrm{Val}(\Delta)^{|\phi\rangle}_{f(Q)}=\mathrm{Val}(f^{-1}(\Delta))^{|\phi\rangle}_{Q} \qquad (12)$$

で置き換えることができるだろうか．ただし，Valは $(\Delta)^{|\phi\rangle}_{Q}$ のような命題に付与される真理値である．$(\Delta)^{|\phi\rangle}_{Q}$ の記号全体は，いまは，「個別的な場合に，量子力学的状態 $|\phi\rangle$ において Q の値が集合 Δ にある」という命題を示すのに用いている．

見解 A に沿う量子力学の実在主義的解釈によると，これらの真理値は，もちろん，つねに明確に定義される．より形式的に言うと，

$$\mathrm{Val}:\{\mathbb{P}\}\rightarrow\{T,\ F\}$$

は，$(\Delta)^{|\phi\rangle}_{Q}$ の形の命題の集合を真理値（真と偽）の2要素集合の上に写す関数である．関数Valは，関数

$$\mathrm{Prob}:\{\mathbb{P}\}\rightarrow[0,\ 1]$$

と対照される．これは，命題 $\mathbb{P}$ の集合を実数の区間 [0, 1] の上に写像する．

さて明らかに，もし (12) が成立するならば，それは，(11) が成立する理由に対するきわめて調和のとれた説明を提供するだろう．(12) が述べていることは，Q の値が $f^{-1}(\Delta)$ にあるのは，$f(Q)$ の値が Δ にあるとき，かつ，そのときにかぎるということである．よって，それぞれの場合に結果が一致しているのだから，長期の頻度したがって確率も一致しなければならない．しかしながら，逆の推論が成立しないことは明らかである．(11) から (12) を演繹することはできない．(11) で示される長期の頻度の一致は，個々の個別的場合における結果の一致をけっして保証しない．

しかし，(12) は実際にFUNCと同値なのである．これを見るには，まず，FUNCが (12) を含意することに注意しよう．つまり，

$$[f(Q)]^{|\phi\rangle}\in\Delta \text{ iff } f([Q]^{|\phi\rangle})\in\Delta$$
$$\text{iff } [Q]^{|\phi\rangle}\in f^{-1}(\Delta)$$

(「iff」は，「のとき，かつ，そのときにかぎり」を表わす便利な略記法である．) これは，(12) の内容を別の仕方で表現している．しかし，(12) もまたFUNCを含意する．つまり，

$$[Q]^{|\phi\rangle}\in\Delta\rightarrow[Q]^{|\phi\rangle}\in f^{-1}(f(\Delta))\rightarrow[f(Q)]^{|\phi\rangle}\in f(\Delta)$$

さて，$\Delta=\{\lambda\}$（1要素集合）ととろう．そうすると，

$$[Q]^{|\phi\rangle}=\lambda \rightarrow [f(Q)]^{|\phi\rangle}=f(\lambda)=f([Q]^{|\phi\rangle})$$

これは，もちろんFUNCである．

よって，FUNCとSTAT FUNCの関係は次のようになる．FUNCをSTAT FUNCから導くことはできない．後者は，それ自身（測定結果の統計の言葉で理解して）量子力学の形式からの定理である．しかし，もしもFUNCが成立するならば，それは，STAT FUNCが成立する理由を理解しやすいものにするだろう．よって，この意味において，〔逆に〕STAT FUNCが，FUNCを認めるための理由を提供すると見なしてもよいだろう．

さて，FUNCを他のより基本的な原理からいかにすれば導けるか，の考察に向かうことにしよう．したがって，FUNCから矛盾が導かれるという事実は，これらの原理のどれかが捨てられなければならないことを示す．われわれは，事実，次の

$$\text{見解}\, A \wedge Corr \wedge R \rightarrow \text{FUNC} \tag{13}$$

を示すだろう．ただし，いつものように，見解 A はすべての状態においてすべてのオブザーバブルにくっきりした値を実在主義的に付与する．そして，$Corr$ と R は次の原理である：

$Corr$（**対応規則**）：

自己共役作用素の集合とオブザーバブルの集合との間に，1対1対応が存在する．

R（**実在原理**）：

自己共役作用素 $\hat{Q}$ と結びつけられ操作的に定義される（すなわち，Q に対して，量子力学の統計アルゴリズムに従って，確率的に分布する）数が存在するならば，その数と結びつけられ，それによって測定される実在の要素（オブザーバブル）が存在する．

この実在原理と，第3章で導入されたアインシュタインの実在原理とを混同しないように注意しなければならない．また，$Corr$ は，いわゆる超選択則が働いていないことを仮定していることにも注意しよう．

さて，これらの原理を用いると，どのようにFUNCが導かれるかを見ることにしよう．量子力学的状態 $|\phi\rangle$ においてオブザーバブル Q を測定すると考える．この測定は，見解 A により，また，忠実な測定FMを仮定すると，オ

ブザーバブルの所有値 $[Q]^{|\phi\rangle}$ を明らかにする．さて，任意の関数 f に対して，数 $f([Q]^{|\phi\rangle})$ をつくる．この数は，$f(Q)$ に対する統計アルゴリズムに従って，確率的に分布している．これは，

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(f([Q]^{|\phi\rangle})\in\Delta) &= \mathrm{Prob}([Q]^{|\phi\rangle}\in f^{-1}(\Delta)) \\ &= \mathrm{Prob}([f(Q)]^{|\phi\rangle}\in\Delta)\end{aligned}$$

から導かれる．ただし，STAT FUNC を採用した．よって，R より，自己共役作用素 $f(\hat{Q})$ に対応し，値 $f([Q]^{|\phi\rangle})$ をもつオブザーバブルが存在する．しかし，*Corr* により，$f(\hat{Q})$ に対応するそのようなオブザーバブルはただ 1 つ存在し，これを通常のように $f(Q)$ で表わす．よって，

$$[f(Q)]^{|\phi\rangle}=f([Q]^{|\phi\rangle})$$

これは，FUNC である．

コッヘン－シュペッカーのパラドクスから逃れる道が基本的に 3 つあることは，(13) から分かる：

1．見解 A を拒否する．$f(Q)$ は一意的な値を所有するのではなくて，より適切に述べると，関係的性質をもつのであり，その値は測定の文脈に依存する．$\hat{A}=f(\hat{B})=g(\hat{C})$ で $[B, C]\neq 0$ なる状況を考えると，A は，C を測定して，その結果に g を適用することによっても測定できる．この数が，B を測定し f を適用して得られるであろう数に等しいと想定する理由はない．したがって，測定により明らかになる A の値は，測定の文脈に依存し，量子力学的オブザーバブルと測定の方法ないし「文脈」を含む全体的な関係的性質を表現している．コッヘン－シュペッカーのパラドクスをこのように解決する仕方は，Bell (1966) によって，量子力学的実在の本性に対するボーア的洞察を表現していると見なされた．この例に含まれる $\hat{B}$ と $\hat{C}$ の非可換性は，実験的配置の非両立性ないし相互排他性を反映している．

この関係主義は，非極大オブザーバブルに適用されるだけでよいことに注意しよう．実際，第 1 章 26 頁の議論から分かるように，B と C が極大で非両立的ならば，A は非極大でなければならない．しかし，コッヘン－シュペッカーのパラドクスの証明は，非両立的な極大オブザーバブルへの値のわり当てに対して含意される制約に本質的に依存している．よって，FUNC は，

$$[A]^{|\phi\rangle}=f([B]^{|\phi\rangle})$$

を意味し，また，

$$[A]^{|\phi\rangle}=g([C]^{|\phi\rangle})$$

を意味する．したがって，

$$f([B]^{|\phi\rangle})=g([C]^{|\phi\rangle})$$

このような，非両立的な極大オブザーバブルへの値のわり当てに対する制約は，FUNC を非極大オブザーバブルへの値のわり当てに適用する文脈においてのみ生じてくる．よって，コッヘン－シュペッカーのパラドクスを導いたときに本質的な要素をなしていたのは，1次元射影作用素（非極大オブザーバブル）のそれぞれにわり当てられる値が，その射影作用素を要素とするどの直交射影作用素系を考えるかから独立であること，あるいは（同じことであるが），どの極大オブザーバブルの関数と考えるかから独立であることであった．もしも，それら（極大オブザーバブル）の間の関数関係を維持する極大オブザーバブルに対する値のわり当てのみに関わるのであれば，矛盾は生じないだろう．このことは，矛盾の導かれ方を見るともっともである．そして，極大オブザーバブルのみを考えるならばコッヘン－シュペッカーのパラドクスは導かれないということの形式的な証明は，Maczynski（1971）によって与えられた．

2．しかしながら，非関係的な性質を所有すると述べて見解 A を維持し，*Corr* を拒否してもよいだろう．言い換えると，今度は，一般にある特定の作用素 $\hat{A}$ に対応する多くの異なるオブザーバブルが存在すると想定する．コッヘン－シュペッカーのパラドクスを処理するためには，われわれがいま与えた議論に従って，オブザーバブルのこの「分裂」を非極大オブザーバブルにのみ要請すれば十分である．よって，次のように考えることになる．非極大作用素のそれぞれには，対応する多くのオブザーバブルが存在する．さらに，これら多くのオブザーバブルは，それらの値と，極大作用素に対応するオブザーバブルの値との間の関数関係によって，互いに区別される．よって，上述のように，$\hat{A}=f(\hat{B})$，$\hat{A}=g(\hat{C})$，$[\hat{B},\hat{C}]\neq 0$ と仮定しよう．ただし，$\hat{B}$ と $\hat{C}$ は極大であり，したがって，これらには一意にオブザーバブル B と C を対応させることができるとする．しかし，$\hat{A}$ は非極大であり，2つのオブザーバブル——もちろん，もっとあるかもしれない——A_B と A_C を対応させる．これらのオブザーバブルは，値のわり当てに関しては，B と C との関数関係によって同定される．

具体的には，

$$[A_B]^{|\phi\rangle}=f([B]^{|\phi\rangle}) \quad \text{かつ} \quad [A_C]^{|\phi\rangle}=g([C]^{|\phi\rangle})$$

ある意味において，極大作用素に対応するオブザーバブルは，存在論的には非極大作用素に対応するオブザーバブルに先立つものである．非極大オブザーバブルを一意に同定するためには，それがどの自己共役作用素に対応するかを知るだけでは十分でない．その値がどの極大オブザーバブルに関係しているかをも知らなければならない．この意味で，それは文脈を必要とする．非極大オブザーバブルをこのように分裂させること，したがって，非極大作用素が多くの異なるオブザーバブルに対応すること，このことを，われわれは**存在論的文脈性**と呼ぶ．所有値の実在性を維持し（見解 A）ながらコッヘン－シュペッカーのパラドクスをうち破るこの考えは，van Fraassen（1973）によって提出された．導入される物理量の増大を見て，クラーク・グリムアはこれを反オッカム化量子力学と称した．コッヘン－シュペッカーのパラドクスは防止される．なぜなら，$\hat{B}$ と $\hat{C}$ が可換でないとき，

$$[A_B]^{|\phi\rangle}=[A_C]^{|\phi\rangle}$$

と考える理由がないからである．これは，コッヘン－シュペッカー論証がこの文脈化された用語法で要請しているものである．たとえば，A_B を測定するためには，B を測定しその結果に関数 f を適用するという具合に進むことに注意しよう．同様に，A_C は，C を測定しその結果に関数 g を適用することによって測定される．よって，測定手順の言葉で表現すると，(1) で論じたベルの関係的性質の手法との相違は存在しない．しかし，存在論的には，ファン・フラッセンの接近法はまったく異なり，所有値の実在主義を伴っている．

3. 実在原理 R を否定することもできるだろう．任意の非極大作用素 A には，一意にオブザーバブルが対応する．しかし，前と同じように，$\hat{A}=f(\hat{B})=g(\hat{C})$ を仮定しても，一意のオブザーバブル A の測定が，必ずしも，B を測定しその結果に f を適用して行なわれるとはかぎらない．このような方法で得られた数が，$\hat{A}$ に対する統計アルゴリズムに従って確率的に分布するというのは真である．しかし，R を否定しているのであるから，これらの数は，存在論的に実際に存在するなんらかの物理量を必ずしも測定しているとはかぎらない．A を測定する「正しい」方法は，C を測定しその結果に関数 g を適用することかも

しれない．しかし，「実在的」*A* のこの測定の値が，最初の方法で得られた数に等しいと仮定しなければならない理由はない．最初の方法は，ここで提出された見解のもとでは，なにも実在的なものを測定していないのである．これは，おそらく，コッヘン－シュペッカーのパラドクスを避けるアーサー・ファインの接近法であろう．しかし，このような見解の擁護者は，*A* の測定法として推定されるどの方法が「実在的な」値を明らかにし，どの方法が単に「空中に漂う」数を生みだすのみで存在論的に意義のあるなにものをも測定しないのかを明確にするという重荷を背負っているように思われる．

われわれは，所有値の単純な実在主義で量子力学を解釈するときにどこまで進んでいけるかを見ようと試みているのであるから，コッヘン－シュペッカーのパラドクスを処理する第2の，すなわちファン・フラッセンの方法を採用しよう．これは，すべての測定手順を同等の基盤に置き，ファインの接近法が含む「本当の」測定と「本当でない」測定との恣意的な区別を拒否する．

しかしながら，議論を必要とする明らかな困難がある．非極大オブザーバブルを，なんらかの極大オブザーバブルを介さずに，直接測定すると想定しよう．たとえば，角運動量の場合に，全角運動量と，ある指定された方向にそった角運動量の（両立可能な）成分との組合せ測定のかわりに，全角運動量（非極大量）のみを測定したとしよう．この組合せ測定は，明らかに極大な測定であろう．角運動量の成分を測定する方向を変えることによって，非両立な極大測定を指定できる．このような場合は，われわれがすでに考察したものである．しかし，非極大測定だけの場合はどうであろうか．さて，コッヘン－シュペッカーのパラドクスをどう扱うかの議論のためには，この問いに答える**必要**はない．答える必要が生じるのは，むしろ，隠れた変数理論が行なう仕方で実在主義的解釈を完成しようとする企てにのりだすときだけであろう．たとえば，ファン・フラッセンは，非極大測定が，つねに，ある極大測定が生じたであろう結果の1つを生じるという考えを提案した．さらにすすんだ議論について，読者は，van Fraassen (1979) を参照してほしい．

さて，われわれが指摘したいのは，ファン・フラッセンのオブザーバブル分裂接近法においては，FUNC の制限された形――FUNC* と呼ぼう――を受けいれているということである．これは，個々の存在論的文脈に相対的なものと

なっている．FUNC* をより慎重に述べよう：

*FUNC** :

$\hat{B}$を**極大**自己共役作用素，$\hat{A}$と$\hat{D}$を自己共役作用素として，関数h，f，gに対して，

$$\hat{A}=f(\hat{B}),\quad \hat{D}=g(\hat{B}),\quad \hat{A}=h(\hat{D})$$

とする．このとき，

$$[A_B]^{|\phi\rangle}=h([D_B]^{|\phi\rangle})$$

FUNC* は，$[A_B]^{|\phi\rangle}$ と $[D_B]^{|\phi\rangle}$ を定義する関係からただちに導かれる．よって，

$$[A_B]^{|\phi\rangle}=f([B]^{|\phi\rangle})=h\circ g([B]^{|\phi\rangle})$$
$$=h([D_B]^{|\phi\rangle})$$

特に，$\hat{D}$が極大ならば，D_Bを一意のオブザーバブルDと同一視できる，

$$[A_B]^{|\phi\rangle}=[A_D]^{|\phi\rangle}$$

よって，与えられた状態$|\phi\rangle$におけるA_Bの値は，与えられた極大オブザーバブルの1対1関数の同値類において，どの極大オブザーバブルの関数と見なされるかに依存しない．したがって，Bによって生成される同値類を $\{B\}$ で示すと，新しい記号を定義することによって，表記法を好都合に修正できる，

$$[A]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}\underset{Df}{=}[A_B]^{|\phi\rangle}$$

これは，$[A_B]^{|\phi\rangle}$ が同値類 $\{B\}$ にのみ依存すること，あるいは（同じことになるが，この議論のために考えている離散スペクトルの場合には）$\hat{B}$に対する固有ベクトルの正規直交基底にのみ依存することを強調するのに役立つ．

FUNC* を明言したことに関して，ただちに2つの問いが生じる．それは，**値の規則** VR と無矛盾であろうか，また，VR から独立であろうか．両方の問いとも，肯定的に答えることができる．Rを，固有ベクトルの（位相因子を除いて）一意の正規直交基底をもつ任意の極大オブザーバブルとしよう．基底のベクトル$|\phi_1\rangle$，$|\phi_2\rangle$... に順番をつけよう．n_0を$|\langle\phi_n|\phi\rangle|^2\neq0$なる最初の$n$とし，

$$[f(R)]^{|\phi\rangle}_{\{R\}}=f(\lambda_{n_0}) \tag{14}$$

と定義する．ただし，λ_{n_0}は$|\phi_{n_0}\rangle$に対応する固有値である．n_0の選び方より，これは VR を満たし FUNC* とも一致する．よって，無矛盾性を証明した．さ

て，（14）は f が恒等関数でないときにのみ成立すると仮定し，$[R]^{|\phi\rangle}=\lambda_{n_1}$ と定義しよう．ただし，n_1 は $|\langle\phi_n|\phi\rangle|^2\neq 0$ なる第2番目の n であり，λ_{n_1} は $|\phi_{n_1}\rangle$ に対応する固有値である．このとき，VR はやはり成立するが，FUNC* は破られる．よって，独立性を証明した．

FUNC* が**極大**オブザーバブルの代数的構造と無矛盾であるかの問題については，すでに言及したモンチンスキーの定理を引用できる．その要旨は，極大オブザーバブルの集合に対して，それらの間の関数関係を保持しながら値をわり当てることは実際に可能である，という定理である．

注と参考文献

コッヘン－シュペッカーのパラドクスのもとの形は，Kochen-Specker（1967）で提出されている．

本文で言及された重要な議論は Fine and Teller（1977）である．**和の規則**と**積の規則**は Fine（1974）で導入された．2色定理と呼んだものは Belinfante（1973）で広範囲に論じられている．FUNC の正当化とその STAT FUNC に対する関係については Healey（1979）を見よ．

和の規則が量子力学の形式を補う原理として実験的にチェックできるかという問題については，多くの議論がある．この問題は，Redhead（1981）においてある程度詳細に検討され，否定的な結論が導かれている．基本的な問題点は，B と C が同時に測定可能でないならば，$[A_B]^{|\phi\rangle}=[A_C]^{|\phi\rangle}$ をチェックできないという点にある．

本文で言及したコッヘン－シュペッカーのパラドクスから逃れる方法については，Bell（1966），van Fraassen（1973）と（1979），Fine（1974）を見よ．FUNC* は，Heywood and Redhead（1983）で導入された．VR に関する FUNC* の独立性と無矛盾性は，ファインによって初めて指摘された．

モンチンスキーの定理の証明については，Maczynski（1971）を見よ．

6　非局所性とコッヘン－シュペッカーのパラドクス

コッヘン－シュペッカーのパラドクスに対するファン・フラッセンの解決法はオブザーバブルの増殖を考えることになるが，このオブザーバブルの増殖に関して，空間的に分離した2つの系の場合に興味深い問いが生じる．存在論的文脈性と非局所性との間に結びつきがあるだろうか．これがこの章で追究する問題である．

6.1　文脈性と非局所性

S_1とS_2を空間的に分離した2つの系とし，これらは過去において相互作用してもしていなくてもよい，とする．$\mathbb{H}_1$と$\mathbb{H}_2$を，それらに対応するヒルベルト空間とする．1.6節で記述したように，合成系（S_1+S_2）には，テンソル積空間$\mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$が対応する．$\hat{A}$を空間$\mathbb{H}_1$の上の極大作用素，$\hat{B}$を空間$\mathbb{H}_2$の上の極大作用素とする．さて，結合系に対する作用素$\hat{A}\otimes\hat{I}$に対応するオブザーバブル$A\otimes I$を考えよう．これは，積空間における極大オブザーバブルではない．これを**局所的極大**オブザーバブルと呼ぼう，というのは，Aが$\mathbb{H}_1$の上で極大と仮定しているからである．

さて，次の問題が生じる．$A\otimes I$は極大でないから，$[A\otimes I]_{\{X\}}$ と $[A\otimes I]_{\{Y\}}$ は異なる「分裂」オブザーバブルの（一般に，等しくない）値として扱われるべきであろうか．ただし，XとYは積空間における非両立な極大オブザーバブルである．存在論的文脈性をそのまま適用すると，そう扱われるべきであるということになるだろう．そうすることの直観的な帰結は特異なものである．ある種の全体主義（holism）が含まれている．積空間における極大オブザーバブルは，要素空間における局所的極大オブザーバブルに，とにかく，先立つものである．これを「分離不能性（nonseparability）」と呼ぶことがで

きよう．しかし，われわれは，それをより具体的に「存在論的局所性」の破綻と呼ぼう．**存在論的局所性**の原理を述べよう．

存在論的局所性（OLOC）：

$\mathbb{H}_1$ と $\mathbb{H}_2$ が，空間的に分離した2つの系に対するヒルベルト空間であり，$(\hat{A}\otimes\hat{I})$ が局所的極大作用素ならば，結合系の任意の状態 $|\phi\rangle$ に対して，

$$[A\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{X\}}=[A\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{Y\}}$$

である．ただし，$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ はともに $\mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$ 上の極大作用素であり，$[\hat{X},\hat{Y}]\neq 0$.

言い換えると，空間的に分離した2つの系の一方における局所的極大オブザーバブルは，結合系に対する異なる極大オブザーバブルの指定に相対的な存在論的文脈性による「分裂」をしない．

しかし，結合系にOLOCを課すとコッヘン－シュペッカーのパラドクスが導かれることの証明ができたと仮定しよう．そうすると，OLOCが破られなければならないことの純粋に代数的証明を与えたことになる．別の言い方をしよう．モンチンスキーの定理を，極大オブザーバブルを拡張して局所的極大オブザーバブルをも含むようには**できない**という証明は可能だろうか．この問いと，また同時に，非局所性の純粋に代数的証明の可能性は，Bub（1976）で提出された．不幸にして，この問いは結局否定的に答えられた．モンチンスキーの定理は，局所的極大オブザーバブルに拡張することができたのである．これらのオブザーバブルの分裂を要請すると，コッヘン－シュペッカーの矛盾は導かれない．これはDemopoulos（1980）によって示された．よって，実在主義を矛盾から救うためにOLOCを破る必要はない．もちろん，OLOCが事実破られないことが導かれるのではない．

しかし，OLOCは，第3章と第4章で論じた局所性原理とどのように関係しているのであろうか．特に，第4章で LOC_3 を論じたが，それは，くっきりした値を，装置の遠くの部分の設定の変化によって，他のくっきりした値に変えることはできない，という局所性原理であった．この考え方をより一般的な設定にするために，**環境的文脈性**（Environmental Contextuality）という概念を導入しよう．ここに含まれる考えは，対象となっている系とその周囲との間になんらかの非量子的相互作用が存在し，この作用は測定の行為の前に生じて

系のオブザーバブルの値を変える，という考えである．これらの相互作用は，LOC_3 が成立しないときにベルの不等式の破れを説明するために必ずもちだされるものに他ならない．しかし，おそらく，これらの相互作用が生じるのは測定の直前にかぎられるとすることには理由はない．だから，われわれは，この種の文脈性を「環境的」と呼びたいのである．これらの想定された相互作用については，まさにその本性のゆえに，われわれはほとんど何も知らない．しかし，われわれは次のことを前提している．これらの相互作用が測定の直前に生じるとき，実際には，それらは測定される系と測定装置との間に生じる非量子力学的な相互作用に他ならず，さらに，ある極大測定がなされると仮定して，装置の設定がそのためになされる被測定系の（少なくとも）極大オブザーバブルに依存する．われわれの表記法を少し拡張し，$[A]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}(B)$ と書いて，系と，B の測定に設定された装置との間の相互作用後に，かつ，実際の測定が生じる前に，分裂オブザーバブル A_B がとる値を示すことにしよう．カッコ内の文字は，その測定のために装置の設定がなされたオブザーバブルを示す．この記号の意味を明確にするために，$[A]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}(C)$ を考えよう．ただし，B と C は非両立的な極大オブザーバブルである．この表現は，単に，測定装置が C の測定のために設定されるときに量 A_B がとるであろう値を意味している．次のことには慎重に注意を払っておこう．われわれは，$[A]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}(C)$ が明確に定義された数であると仮定しているけれども，その値を測定によって見出すことはできない．なぜなら，B と C は非両立的と仮定しているから，装置を C の測定に合わせて設定したままで（B の測定によって）A_B を測定することができないからである．

文脈性のこの考えを，空間的に分離した系に適用すると，**環境的局所性**と呼ぶもう1つの形の局所性に思いいたる．

環境的局所性（ELOC）:

S_1 と S_2 を空間的に分離した2つの系とし，Q を S_1 に対するオブザーバブル，X と Y を結合系（S_1+S_2）に対する極大オブザーバブルとする．このとき，もし，X の測定に設定された装置と，Y の測定に設定された装置との違いが，単に，S_2 に位置する装置の部分の設定の違いのみであるならば，

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{X\}}(X)=[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{X\}}(Y)$$

言い換えると，結合系に対する測定の文脈の一部をなす装置の遠い部分の配置を変えることによって，局所的オブザーバブルが所有する値を変えることはできない．

ELOC を述べるときに，OLOC を前提していないことに注意しよう．この意味において，それは，OLOC の暗黙の仮定を含む LOC_3 に組み込まれた考えの一般化である．実際，後に（6.4 節で）論じるように，OLOC が成立するときにのみ，ELOC を局所性原理と呼ぶことが適切になりうるのである．

われわれが今することは，これら 2 つの局所性の観念を次のような仕方で結合することである．われわれは，適切な物理系に対して，

$$\mathrm{VR} \wedge \mathrm{FUNC}^* \wedge \mathrm{ELOC} \wedge \mathrm{OLOC} \rightarrow \text{矛盾}$$

を示そう．ただし，VR は先に 133 頁で導入した**値の規則**であり，FUNC^* は 152 頁で定義した FUNC の変形であり，この変形に問題はない．矛盾は，値のわり当ての間の結合関係から導かれる．この結合関係は，後に見るように，FUNC とはやや微妙な仕方で異なるけれども，FUNC ときわめて密接な関係がある．

したがって，

$$\mathrm{VR} \wedge \mathrm{FUNC}^* \rightarrow (\sim\mathrm{ELOC}) \vee (\sim\mathrm{OLOC})$$

よって，われわれはジレンマに立たされる．VR と FUNC^* を手放さないならば，ELOC か OLOC のどちらか（ないしは，両方）を破らざるをえないことになる．このジレンマの一方の角（つの）をつかむことが意味することについては，6.4 節で論じることにしよう．さて，われわれはこの主要な結果の形式的証明に向かおう．

6.2　同時測定可能値の規則

環境的文脈性を適切に考慮するために，VR を少し修正することから始めよう．極大オブザーバブル R の場合を考えて，

$$\mathrm{Prob}(\lambda)_R^{|\phi\rangle} = 0 \rightarrow [R]^{|\phi\rangle}(R) \neq \lambda$$

と書く．すなわち，測定結果に対する観測の確率がゼロであることは，R の測定の文脈で R がもつ値を制限する．しかし，たとえば，非両立的な極大オブザーバブル P に関して，量 $[R]^{|\phi\rangle}(P)$ については何も言わない．同様に，

FUNC* も，環境的文脈性を考慮するように改めよう：任意の環境的文脈 C に対して，

$$[A]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}(C)=h([D]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}(C))$$

ただし，$\hat{B}$ は極大であり，$\hat{A}=h(\hat{D})$，$\hat{A}=f(\hat{B})$，$\hat{D}=g(\hat{B})$.

特に，ここから

$$[A]^{|\phi\rangle}_{\{B\}}(B)=f([B]^{|\phi\rangle}(B))$$

が得られるが，これは本章で後に採用する FUNC* の形である.

さて，VR と FUNC* から，**同時測定可能値の規則**（CVR）と呼ぶものを導こう．Fine（1974）は，われわれが**拡張された値の規則**と呼ぶ値のわり当ての制限を議論にとりあげ，すぐ拒否している．それは，次のものである：

拡張された値の規則（EVR）：

$\hat{Q}_1$ と $\hat{Q}_2$ が可換ならば，

$$\mathrm{Prob}(\lambda,\ \mu)^{|\phi\rangle}_{Q_1,\,Q_2}=0\rightarrow[Q_1]^{|\phi\rangle}\neq\lambda\ \text{または}\ [Q_2]^{|\phi\rangle}\neq\mu$$

ただし，$\mathrm{Prob}(\lambda,\ \mu)^{|\phi\rangle}_{Q_1,\,Q_2}$ は，状態 $|\phi\rangle$ において，オブザーバブル Q_1 に対して測定結果 λ，オブザーバブル Q_2 に対して μ を見出す量子力学的結合確率を表わしている.

ファインがすぐさまこの規則を拒否した理由は，これが FUNC を含意することが容易に示せるからである．つまり，$\hat{W}_\phi$ が状態 $|\phi\rangle$ に対応する密度作用素であり，χ_Δ が集合 Δ に対応する通常の特性関数ならば，統計アルゴリズムから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(\lambda,\ \mu)^{|\phi\rangle}_{Q,\,f(Q)}&=\mathrm{Tr}(\hat{W}_\phi\cdot\chi_\lambda(\hat{Q})\cdot\chi_\mu(f(\hat{Q})))\\&=\mathrm{Tr}(\hat{W}_\phi\cdot\chi_\lambda(\hat{Q})\cdot\chi_{f^{-1}(\mu)}(\hat{Q}))\\&=\mathrm{Tr}(\hat{W}_\phi\cdot\chi_{\{\lambda\}\cap f^{-1}(\mu)}(\hat{Q}))\end{aligned}$$

が得られ，よって，$\lambda\notin f^{-1}(\mu)$，すなわち $\mu\neq f(\lambda)$ ならば，

$$\mathrm{Prob}(\lambda,\ \mu)^{|\phi\rangle}_{Q,\,f(Q)}=0$$

が導かれる．よって，EVR より，

$$[Q]^{|\phi\rangle}\neq\lambda\quad\text{または}\quad[f(Q)]^{|\phi\rangle}\neq\mu$$

しかし，

$$[Q]^{|\phi\rangle}=\lambda$$

と仮定すると，

$$[f(Q)]^{|\phi\rangle} \neq \mu, \ \forall \mu \neq f(\lambda)$$

すなわち，

$$[f(Q)]^{|\phi\rangle} = f(\lambda) = f([Q]^{|\phi\rangle})$$

が導かれ，これはFUNCである．

さて，CVRを，ある同時測定可能なオブザーバブルにEVRを制限したものとして，導入しよう．2つのオブザーバブルが同時測定可能であるためには，対応する自己共役作用素が可換であることは必要条件であるが，文脈性を考慮するとき，これは十分条件ではない．確かに，2つのオブザーバブル Q_1 と Q_2 が同一の極大オブザーバブル R の文脈で定義されることは，真の同時測定可能性に対する十分条件である．

さて，新しい規則を導入しよう：

同時測定可能値の規則（CVR）：

$\hat{Q}_1$ と $\hat{Q}_2$ が可換であり，$\hat{R}$ が関数 f と g に対して $\hat{Q}_1 = f(\hat{R})$ かつ $\hat{Q}_2 = g(\hat{R})$ なる極大作用素ならば，

$$\mathrm{Prob}(\lambda, \mu)^{|\phi\rangle}_{Q_1, Q_2} = 0 \rightarrow [Q_1]^{|\phi\rangle}_{(R)}(R) \neq \lambda \text{ または } [Q_2]^{|\phi\rangle}_{(R)} \neq \mu$$

さて，CVRがVRとFUNC*から導かれることを示そう．次のことを見るのはやさしい．

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(\lambda, \mu)^{|\phi\rangle}_{Q_1, Q_2} &= \mathrm{Tr}(\hat{W}_\phi \cdot \chi_\lambda(f(\hat{R})) \cdot \chi_\mu(g(\hat{R}))) \\ &= \mathrm{Tr}(\hat{W}_\phi \cdot \chi_{f^{-1}(\lambda)}(\hat{R}) \cdot \chi_{g^{-1}(\mu)}(\hat{R})) \\ &= \mathrm{Tr}(\hat{W}_\phi \cdot \chi_{f^{-1}(\lambda) \cap g^{-1}(\mu)}(\hat{R})) \\ &= \mathrm{Prob}(f^{-1}(\lambda) \cap g^{-1}(\mu))^{|\phi\rangle}_R\end{aligned}$$

よって，値の規則から，

$$\mathrm{Prob}(\lambda, \mu)^{|\phi\rangle}_{Q_1, Q_2} = 0 \rightarrow [R]^{|\phi\rangle}(R) \notin f^{-1}(\lambda) \cap g^{-1}(\mu)$$

しかし，

$$[Q_1]^{|\phi\rangle}_{(R)}(R) = \lambda \quad \text{かつ} \quad [Q_2]^{|\phi\rangle}_{(R)}(R) = \mu$$

と仮定すると，FUNC* によって，

$$[R]^{|\phi\rangle}(R) \in f^{-1}(\lambda) \quad \text{かつ} \quad [R]^{|\phi\rangle}(R) \in g^{-1}(\mu)$$

よって，

$$[R]^{|\phi\rangle}(R) \in f^{-1}(\lambda) \cap g^{-1}(\mu)$$

したがって,

$$\mathrm{Prob}(\lambda,\ \mu)^{|\phi\rangle}_{Q_1, Q_2}=0 \rightarrow \sim([Q_1]^{|\phi\rangle}_{\{R\}}(R)=\lambda \quad \text{かつ} \quad [Q_2]^{|\phi\rangle}_{\{R\}}(R)=\mu)$$
$$\rightarrow [Q_1]^{|\phi\rangle}_{\{R\}}(R)\neq\lambda \quad \text{または} \quad [Q_2]^{|\phi\rangle}_{\{R\}}(R)\neq\mu$$

これは,CVR に他ならない.逆に,CVR から,FUNC の制限された受け入れられる形,すなわち,FUNC* のみを導くことができることは,明らかである.

われわれに特に興味のある CVR の特定の場合を展開しよう.$\hat{Q}\otimes\hat{I}$ と $\hat{I}\otimes\hat{Q}'$ をある積空間 $\mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$ 上の自己共役作用素とし,$\hat{Q}\otimes\hat{I}$ と $\hat{I}\otimes\hat{Q}'$ は空間的に分離した2つの系 S_1 と S_2 に結びつけられているとする.2つの作用素のテンソル積 $\hat{A}\otimes\hat{B}$ において,左の作用素 $\hat{A}$ は空間 $\mathbb{H}_1$ に作用し,右の作用素 $\hat{B}$ は空間 $\mathbb{H}_2$ に作用すると約束しよう.関数 h と k に対して,$\hat{Q}=h(\hat{A})$ かつ $\hat{Q}'=k(\hat{B})$ とする.このとき,$\hat{Q}\otimes\hat{I}=h(\hat{A})\otimes\hat{I}=h(\hat{A}\otimes\hat{I})$.同様に,$\hat{I}\otimes\hat{Q}'=k(\hat{I}\otimes\hat{B})$ である.$\hat{A}$ と $\hat{B}$ は,積空間のそれぞれの成分空間上で,縮退していないとすると,$A\otimes I$ と $I\otimes B$ は局所的極大オブザーバブルである.$\hat{A}=\sum_i \alpha_i\hat{P}_i$ と $\hat{B}=\sum_i \beta_i\hat{P}_i'$ を,$\hat{A}$ と $\hat{B}$ のスペクトル分解としよう.さて,$c_{ij}=F(\alpha_i,\ \beta_j)$ かつ F : $\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ を1対1として,自己共役作用素 $\hat{O}=\sum_{ij} c_{ij}\hat{P}_i\otimes\hat{P}_j'$ に対応する任意のオブザーバブルを考えれば,CVR が $\hat{Q}\otimes\hat{I}$ と $\hat{I}\otimes\hat{Q}'$ に適用されることを示すのに十分である.F は1対1であるから,$f(c_{ij})=\alpha_i$ かつ $g(c_{ij})=\beta_j$ なる関数 f と g が存在し,よって,

$$\begin{aligned} hf(\hat{O}) &= h\left(\sum_{ij} f(c_{ij})\hat{P}_i\otimes\hat{P}_j'\right) \\ &= h\left(\sum_i \alpha_i\hat{P}_i\otimes\sum_j \hat{P}_j'\right) \\ &= h(\hat{A}\otimes\hat{I}) \\ &= \hat{Q}\otimes\hat{I} \end{aligned}$$

同様に,

$$kg(\hat{O})=\hat{I}\otimes\hat{Q}'$$

よって,積空間 $\mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$ において,

$$\mathrm{Prob}(X,\ Y)^{|\phi\rangle}_{Q\otimes I,\ I\otimes Q'}=0$$

から,CVR によって,

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\}}(O)\neq X \quad \text{または} \quad [I\otimes Q']^{|\phi\rangle}_{\{\}}(O)\neq Y \tag{1}$$

が導かれる．この結果を適用する前に，ELOC と OLOC を簡潔に定式化しておきたい．そのために，まず記号 $\langle A, B\rangle$ を定義しよう．$\langle A, B\rangle$ は，成分系の作用素 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ から，上に述べた仕方で構成された作用素 $\hat{O}$ に対応する結合系の極大オブザーバブ O を意味する．カッコ記号は順序対（A, B）に対して定義される関数を表わし，これは関数 F によって（部分的に）指定されることに注意しよう．

さて，O を測定するために装置の 2 つの部分を結びつける．一方は，S_1 と相互作用し S_1 の A を測定するように調整される．他方は，S_2 と相互作用し S_2 の B を測定するように調整される．それから，これらの測定結果の順序対に関数 F を適用する．得られた数が O の測定である．こうして，O の測定に言及する環境的文脈をはっきりと書くことができる．つまり，S_1 と相互作用する装置が A 測定に設定され，S_2 と相互作用する装置が B 測定に設定されることを示す順序対（A, B）として明確に表わすことができる．

さて，結果（1）を次の形で表現することができる：

もし，

$$\mathrm{Prob}(X,\ Y)^{|\phi\rangle}_{Q\otimes I,\, I\otimes Q'}=0$$

ならば，

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(A,\ B)\neq X \quad \text{または} \quad [I\otimes Q']^{|\phi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(A,\ B)\neq Y \tag{2}$$

添え字 $\{\langle A, B\rangle\}$ は，それが，$\langle A, B\rangle$ を指定するときに F としてどの 1 対 1 関数を選ぶかに関係しないことを，示す．われわれは，記号の順序対において，第 1 の要素はつねに系 S_1 に言及し，第 2 の要素は系 S_2 に言及する，という約束に従う．

新しい表記法を用いて，2 つの局所性原理（そのうちの 1 つは，少し拡張された形の OLOC である）を表現できるところまできた．ある関数 h に対して $Q=h(A)$，かつ A, B, C, D, E がすべて極大であるような，すべての Q, A, B, C, D, E に対して，

OLOC：

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(D,\ E)=[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A, C\rangle\}}(D,\ E) \tag{3}$$

ELOC：

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A,\,B\rangle\}}(D,\,E)=[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A,\,B\rangle\}}(D,\,C) \tag{4}$$

OLOC の定式化（3）において，FUNC* を採用して，

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A,\,B\rangle\}}(D,\,E)=h([A\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A,\,B\rangle\}}(D,\,E))$$

$$[Q\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A,\,C\rangle\}}(D,\,E)=h([A\otimes I]^{|\phi\rangle}_{\{\langle A,\,C\rangle\}}(D,\,E))$$

と書いたことに注意しよう．このとき，式（3）は，$A\otimes I$ のような局所的極大オブザーバブルを用いて，OLOC の先の定式化から導かれる．必要な変更を加えれば，（3）と（4）を，S_2 で局所的なオブザーバブル $I\otimes Q'$ に適用することができる．

6.3　CVR と局所性の非両立性

さて，結果（2），（3），（4）を採用して矛盾を導こう．証明では，再び，空間的に分離した 2 つの系 S_1 と S_2 を 1 つの系 S_1+S_2 として考えよう．単純化するために，部分系それぞれは N 次元ヒルベルト空間に結びつけられていると仮定し，2 つの局所的極大作用素 $\hat{A}\otimes\hat{I}$ と $\hat{I}\otimes\hat{B}$ を考える．$\hat{A}$ は N 個の異なる固有値をもつとし，これらを任意の順序で，$a_1, \ldots, a_N$ と書く．また，$\hat{B}$ も N 個の異なる固有値をもつとし，これらを任意の順序で，$b_1, \ldots, b_N$ と書く．結合系の状態を

$$|\Psi\rangle=\sum_{m=1}^{N} C_m|a_m\rangle|b_m\rangle \tag{5}$$

とする．ただし，C_m は特に定めない複素係数で，$|a_m\rangle$ は固有値 a_m に対応する $\hat{A}$ の固有ベクトルを示し，$|b_m\rangle$ は固有値 b_m に対応する $\hat{B}$ の固有ベクトルを示す．よって，$|\Psi\rangle$ は，$\hat{A}\otimes\hat{I}$ と $\hat{I}\otimes\hat{B}$ に対して同時に固有ベクトルとなっているベクトルの線形結合であり，$\hat{A}$ の m 番目の固有値が $\hat{B}$ の m 番目の固有値と結びつけられている．

さて，適当な関数 f と g に対して $\hat{Q}=f(\hat{A})=g(\hat{A}')$ なる非極大自己共役作用素 $\hat{Q}$ を考えよう．ただし，$\hat{A}'$ は，$\hat{A}$ と非可換な別の極大作用素である．この構成の仕方から，

$$\mathrm{Prob}(a_m,\,y)^{|\Psi\rangle}_{A\otimes I,\,I\otimes B}=0 \qquad (\forall y\neq b_m) \tag{6}$$

の結果が得られる．よって，（2）を適用して，

$$[A\otimes I]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A,\,B\rangle\}}(A,\,B)=a_m\rightarrow[I\otimes B]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A,\,B\rangle\}}(A,\,B)\neq \mathrm{y} \qquad (\forall y\neq b_m)$$

$$\to [I\otimes B]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(A,\ B)=b_m \qquad (7)$$

を得る．また，表記法の明らかな拡張を行なって，測定によって示される $A\otimes I$ の値が集合 $f^{-1}(f(x))$ の要素であると読むことを許すことにして，

$$\mathrm{Prob}(f(x),\ b_m)^{|\Psi\rangle}_{f(A\otimes I),\ I\otimes B}=\mathrm{Prob}(f^{-1}(f(x)),\ b_m)^{|\Psi\rangle}_{A\otimes I,\ I\otimes B}$$

も得られる．しかし，

$$\mathrm{Prob}(f^{-1}(f(x)),\ b_m)^{|\Psi\rangle}_{A\otimes I,\ I\otimes B}=0$$

$(a_m\notin f^{-1}(f(x))$ すなわち $f(a_m)\neq f(x)$ なる任意の x に対して$)$

よって，再び（2）を用いて，

$$[I\otimes B]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A', B\rangle\}}(A',\ B)=b_m$$

$$\to [f(A\otimes I)]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A', B\rangle\}}(A',\ B)\neq f(x)$$

$(f(a_m)\neq f(x)$ なる任意の x に対して$)$

$$\to [f(A\otimes I)]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A', B\rangle\}}(A',\ B)=f(a_m) \qquad (8)$$

さて，適当な置き換えをして，（3）と（4）の形の OLOC と ELOC を系 S_2 に適用すると，

$$[I\otimes B]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(A,\ B)=[I\otimes B]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A', B\rangle\}}(A',\ B)$$

が与えられる．よって，（7）と（8）から，

$$[A\otimes I]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(A,\ B)=a_m\to [f(A\otimes I)]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A', B\rangle\}}(A',\ B)=f(a_m) \qquad (9)$$

あるいは，より簡潔に，

$$[f(A\otimes I)]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A', B\rangle\}}(A',\ B)=f([A\otimes I]^{|\Psi\rangle}_{\{\langle A, B\rangle\}}(A,\ B)) \qquad (10)$$

が得られる．さて，（10）は，必ずしも，FUNC ではない．というのは，FUNC は，オブザーバブルに付与され同時に存在する値の間の関数関係を保持するのに対して，（10）では，等式の両辺で異なる環境的文脈になっているからである．それにもかかわらず，（10）は，FUNC の文脈化されていない形とまったく同じように，矛盾を証明するのに用いることができる．これを見るために，2 つのスピン 1 系の結合系 S_1+S_2 が全スピンの 1 重項状態にあるように準備されている場合に話しをかぎることにしよう．この例は，すでに 1.8 節で扱われている．

a，b，c を異なる実数として，コッヘン－シュペッカーのスピン・ハミルトニアン

$$\hat{H}_s=a\hat{S}_x^2+b\hat{S}_y^2+c\hat{S}_z^2 \qquad (11)$$

の固有状態を用いると，全スピンの1重項固有状態は，（式（1.108）参照）

$$|\Psi_{\text{singlet}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|a+c\rangle|a+c\rangle - |b+c\rangle|b+c\rangle - |a+b\rangle|a+b\rangle\right) \quad (12)$$

で与えられる．これは，一般的な分析を行なった（5）と同じ形をしている．さて，$\hat{A}'$ として，作用素

$$\hat{H}_s' = a\hat{S}_{x'}^2 + b\hat{S}_{y'}^2 + c\hat{S}_z^2 \quad (13)$$

をとろう．ただし X'，Y'，Z で示す新しい直交方向の組は，X，Y，Z で示す方向を Z 軸のまわりに回転して得たものである．最後に，Q として，作用素

$$\hat{S}_z^2 = f(\hat{H}_s) = f(\hat{H}_s') \quad (14)$$

をとる．ただし，$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ は，（式（1.98）参照）

$$f(x) = (c-a)^{-1}(b-c)^{-1}(x-(a+b))(x-2c) \quad (15)$$

で定義される．（f は逆関数をもたないから，（14）が $H_s = H_s'$ を含意しないことに注意しよう！）$f(\hat{H}_s \otimes \hat{I}) = f(\hat{H}_s) \otimes \hat{I} = \hat{S}_z^2 \otimes \hat{I}$ であるから，われわれの結果（10）は，

$$[S_z^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H'_s \otimes I\}}(H_s' \otimes I) = f([H_s \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}(H_s \otimes I)) \quad (16)$$

の形の省略法で表現できる．ただし，OLOC と ELOC のもとでオブザーバブルの値が依存しない文脈性のパラメーターは，存在論的なものであれ，環境的なものであれ，削除した．（われわれは，文脈性のパラメーターを $H_s' \otimes I$ や $H_s \otimes I$ のように書いて，テンソル積の因子の順序の約束に従って，どの系に言及しているかを示すようにした．（10）で用いた順序対の表記をはぶいたので，H_s や H_s' が言及する系を区別する別の方法が必要なのである．）

さて，（16）は，$[S_z^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H'_s \otimes I\}}(H_s' \otimes I)$ に，そして最も重要なことだが，Z の方向に，次の2つの性質をもつ数を与えている：

1. $\hat{H}_s'$ を指定するのに用いた X' 軸と Y' 軸の向きから独立である．
2. 値は0か1である．

条件2は，$H_s \otimes I$ に固有値の1つがわり当てられることと，（15）に示される f が固有値の集合から集合 $\{0, 1\}$ の上への写像であることから，導かれる．さて，次に，直交する3つ組 X'，Y，Z' を用いて，（16）にいたる論証をくり返すことができ，そうすると，

$$[S_y^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H''_s \otimes I\}}(H_s'' \otimes I)$$

に，したがって方向 Y に与えられる数は，$[H_s \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}(H_s \otimes I)$ の，異なる関数 g となる．ただし，

$$\hat{H}_s'' = a\hat{S}_{x'}^2 + b\hat{S}_y^2 + c\hat{S}_{z'}^2$$

この数もまた次の性質をもつ：

1. H_s'' を指定するのに用いた X' 軸と Z' 軸の向きから独立である．
2. 値は 0 か 1 である．

関数 g は（式（1.97）参照）

$$g(x) = (b-c)^{-1}(a-b)^{-1}(x-(c+a))(x-2b) \tag{17}$$

で与えられる．

最後に，$S_x^2 \otimes I$ に対する論証をくり返して，$[S_x^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H_s''' \otimes I\}}(H_s''' \otimes I)$ に，よって方向 X に与えられる数は，$[H_s \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}(H_s \otimes I)$）の新しい関数 h となり，次の性質をもつ：

1. 回転した作用素

$$H_s''' = a\hat{S}_x^2 + b\hat{S}_{y'}^2 + c\hat{S}_{z'}^2$$

   の指定に用いた Y' 軸と Z' 軸から独立である．

2. 値は 0 か 1 である．

関数 h は（式（1.96）参照）

$$h(x) = (a-b)^{-1}(c-a)^{-1}(x-(b+c))(x-2a) \tag{18}$$

で与えられる．しかし，3 つの関数 f，g，h は，$\hat{H}_s \otimes \hat{I}$ の任意の固有値に対して，3 つの値の和がつねに 2 であるという性質をもっている．これは，等式 (15)，(17)，(18) から，x に値 $a+b$，$a+c$，$b+c$ を与えることで，すぐに確かめられる．

よって，最終的な結果は，任意に選んだ直交方向 X，Y，Z に 3 つの数を，各数は 0 か 1 で，和が 2 となるようにわり当てることとなる．しかし，そのような数のわり当ては，ユークリッド的 3 次元ベクトル空間において，適当に選んだ有限個の直交 3 つ組方向に対して不可能であることが知られている．これはコッヘン－シュペッカーがはっきりと示したことである．

しかし，次のことに注意しておこう．われわれが矛盾を導くのに用いた数，

$$[S_z^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H_s' \otimes I\}}(H_s' \otimes I),\ [S_y^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H_s'' \otimes I\}}(H_s'' \otimes I),\ [S_x^2 \otimes I]^{|\Psi_{\text{singlet}}\rangle}_{\{H_s''' \otimes I\}}(H_s''' \otimes I)$$

は，$\hat{H}_s'$，$\hat{H}_s''$，$\hat{H}_s'''$ が可換でないので，一般に同時に測定することができないが，

それだけでなく，環境的文脈が異なるので，同時に共存するとさえも言うことができない．もとのコッヘン－シュペッカーのパラドクスと対照的に，われわれは，今，（たとえ，同時測定が不可能でも）同時に存在する値のわり当てを扱っているのではなくて，異なる環境的文脈を仮定してわり当てられるであろう数を扱っているのである．

6.4 含　意

われわれの論証の結末はこうである．**値の規則**を課すことを望み，無実に見えるFUNC* を否定することを望まない量子的実在主義者は，ある形の非局所性を受け入れなければならない——すなわち，OLOC か ELOC を否定しなければならない．

ジレンマの2つの角(つの)を交互に見ていこう．OLOC を破ることが意味するのは，われわれは1つの系の性質を結合系全体に関係する性質の指定から独立に指定することがもはやできない，ということである．ここから存在論的全体性主義が導かれる．そこでは，量子力学に対して，2つの分離した系の各々に性質（オブザーバブル）を独立に結びつける実在主義的解釈に意味を与えることが不可能である．もし OLOC が破られるならば，局所的極大作用素に対応するオブザーバブル自身は決して「局所的」でない．したがって，そのようなオブザーバブルの値が ELOC により否定される仕方で環境的変化によって変えられうるかという問いは，本当は局所性の問題ではない．ELOC を破ることが局所性の問題になるのは，OLOC が成立するときだけである．このような場合に，ELOC の破れが示しているのは，2つの分離した系の1つに属すると述べることが適切なオブザーバブルの値が，他方の系と相互作用する装置の設定の変更によって変わるということである．この議論の全体は，4.4節で確率的な隠れた変数理論の場合に引き出した区別に似ている．そこでは，完全性条件（4.32）の破れが，全体主義ないし分離不能性によって解釈されている．ELOC と OLOC が，概念的にまったく異なるにもかかわらず，多くの文献で見かけ上は1つになっている理由は，測定結果の言葉で表現されると，どちらの原理の破れからも，一方の系に関係する装置が記録する結果が他方の（遠い）系に関係する装置の設定に依存することが証明されるということにある．

OLOC を保持しようと決心するならば，われわれの論証が提供するのは，ベルの不等式の議論に含まれたのとはまったく異なる性格をもつ ELOC が破れることの証明なのである．現在，さまざまな形のベルの不等式を導くときの暗黙の仮定にきわめて多くの文献が注意を向けている．この章でのわれわれの方法は，確率論を最少に，また平明にしか用いていない．そして，確かに，非可換作用素に対応するオブザーバブルに対する結合分布の仮定を行なっていない．それは，おそらく，量子力学の実在主義解釈における非局所性の純粋に代数的証明に可能なかぎり近いであろう．再び次のことに注意しておこう．矛盾の導出に反事実的事象を用いることは，非局所性のこの証明が環境的文脈に対するオブザーバブルの値の**決定主義的**依存を仮定して初めて成り立つことを意味している．これは，4.1 節と 4.2 節で与えたベルの不等式のエバーハード型の証明を議論したときに示した制限に似ている．

注と参考文献

本章の結果は，Heywood and Redhead (1983) に基づいている．上でふれたように，モンチンスキーの定理を局所的極大オブザーバブルへ拡張する研究は，Bub (1976) において示唆された．そのような拡張が可能であることの証明は，Demopoulos (1980), section V, addenda に見ることができる．また，デモプーロスの論証のもとの形（反対の結論が導かれている）における欠陥については，Humphreys (1980) と Bub (1980) で与えられた議論を見よ．（存在論的）分離可能性と局所性との区別は，Howard (1985) でさらに強調されている．

7 実在主義と量子論理

7.1 論理の改訂可能性

量子力学の哲学における非常に多くの文献が主張するところによると，量子力学の「パラドクス」の考察により認識されるべきことは，真の概念的変革が生じているということであり，それは論理の改定であるということになる．たとえば，パトナムは，論理と量子力学（QM）の関係を，幾何と一般相対論（GR）の関係と同じように見ている．図式的に表現すると，

$$\frac{\text{幾何}}{\text{GR}}=\frac{\text{論理}}{\text{QM}}$$

物理理論の一般相対論から幾何の新しい考え方が導かれたのとちょうど同じように，量子力学から論理の新しい考え方が導かれると見られるべきである．

基本的な考えはこうである．L で古い論理を表わすと，われわれは，潜在性，非局所性等の新しい「パラドクス的な」物理的考え方に導かれるように思われる．このパラドクス的な「新しい」物理学を P' で表わそう．そうすると，われわれが扱う全理論は，$L+P'$ である．しかし，L を「新しい」論理 L' に変えることによって，古典的実在主義の「古い」非パラドクス的物理学——P と呼ぶ——にもどることができるのだろうか．図式的には，等式

$$L+P'=L'+P$$

となるだろう．デュエム－クワイン・テーゼの極端な形で表わされるような，科学哲学への全体主義的・規約主義的（holistic-conventionalist）接近法の精神のもとでは，この問題で自由な選択ができる．古典論理 L を維持しつづけてパラドクス的な物理学 P' を我慢するか，または，新論理 L' を採用するという代償を払ってパラドクスを除くか，である．

明らかに，この計画では，論理を特殊な命題——論理的真理——を表わして

いると考え，そして次に，論理的真理と世界についての他の真なる命題との区別をぼかそうとしている．われわれは，論理が第1に関係するのが，妥当な帰結の観念，妥当な論証において真理を前提から帰結に伝染させるという観念であるとは考えていない．もちろん，古典論理において，妥当な帰結の観念は，いわゆる**演繹メタ定理**の意味論的形によって論理的真理の観念に還元される．(これは，7.4節でより詳しく説明する．)

論理的真理の観念の理解に対する主要な接近法のいくつかを簡単に見ておこう．論理的真理は，量化子や結合子のような論理語の意味によって真であるという見解を考察しよう．素朴なプラトン的接近法において，これらの意味は外的な絶対的イデアに付着しており，理性的洞察ないし直観によってわれわれに知られる．ここには，論理の改訂の余地はない——「改訂された」論理は，単に「間違った」論理にすぎないだろう．この見解に対立するのは，論理に対する経験主義的接近法である．論理的真理は，きわめて一般的な——実際，最も一般的な——物理法則にすぎない．その一般性は，任意の物理的対象ないし系に適用されるという事実にある．われわれは，好むなら，再びこう言える．論理的真理は，論理語の意味のゆえに真である．しかし，これらの意味は，今度は物理的世界におけるより基本的な相互関係子（correlatives）から引き出される．

この見解から導かれるのは，物理学を変えれば，論理も変えるよう**強いられる**ということであり，これは，規約主義者の主張よりもずっと強い主張である．しかし，このような仕方で論理を物理学に結びつけるならば，認識論において完全に経験主義的立場をとって，すべての事実的命題は究極的には物理学に還元されると見なすのでないかぎり，数学のような他の論証の分野で論理がいかに機能するかを理解するのが困難になるだろう．

ここですでに，論理の改訂可能性と普遍性との間の緊張状態を明らかにした．論理は改訂可能であると言いたいならば，論理の絶対的な，あるいは普遍的な地位を諦めて，相対主義的立場に退却したがっていることになるだろう．異なる論証分野には，そこに適した異なる論理があるかもしれない．どれが唯一の「正しい」論理かという問いは生じない．その論理は当面の目的にとって正しいかという問いに関心をむけるのみである．これは，論理の道具主義的見解と

名づけてもいいだろう．選択肢としての論理を研究する2つの方法を考えてみることができる:

1. 選択肢としての論理を，特に指定しない可能な適用のための道具を工夫しながら，純粋に形式的な仕方で研究できるだろう．
2. 個々の特定の適用を見て，その特定の目的のための特定の論理を選り分けることを試みることができるだろう．

論理学の専門的な展開においては，これら2つの方法は，それぞれ**統語論的**接近法と**意味論的**接近法として特徴づけられている．

7.2 古典命題論理

焦点を絞るために，古典命題計算を考えよう．いくつかの統語論的概念から始めよう．

1. 変数の可算無限集合 $P=\{p_n \mid n\in\omega\}$，ただし，$\omega$ は最初の超限順序数である〔$\boldsymbol{N}$ を自然数全体の集合として $\{p_n \mid n\in \boldsymbol{N}\}$ を考えることと同じ〕．
2. 結合子，「でない」，記号は $\sim$
「または」，記号は $\vee$
「かつ」，記号は $\wedge$
3. 区切りを示すカッコ（，）

記号列とは記号の有限列である．**整式**（wff）とは，（非形式的にみると「有意味な」）記号列の特別な集合の要素〔つまり，非形式的にみたときに有意味になる記号列〕である．この集合を $F=\{\mathrm{wff}\}$ で表わす．

さて，F から有限部分集合 A を選び出すことができて，それを**公理**として扱う．よって，$A=\{$公理$\}$．さらに，**推論規則**を導入する．これによって，F のある要素を A から導くことができる．そのように導かれた（A 自身の要素も含めて）F の要素全体からなる集合を**定理集合** $\mathfrak{T}$ と呼ぶ．これは，これらの公理と推論規則に相対的である．こうして，形式的演繹体系

公　理

↓　推論規則

定　理

が得られる．さて，古典命題計算においてこのようなことをする目的は何だろうか．それは，**すべて**の論理的真理を$\mathfrak{T}$の要素として表わすことを考えているのである．少数の特殊な論理的真理——公理——から，すべての論理的真理——定理——を体系的に導き出すことができる．われわれは，実際に，古典命題計算に対する**完全性メタ定理**を示そうと思う．

完全性メタ定理：

wff が論理的真理であるのは，それが定理のとき，かつ，そのときにかぎる．

（結果の「のとき」の部分を含むここでのいくらか特異な完全性の用法に注意しよう．）

このようなメタ定理の証明には，論理的真理の意味に対する明確な定義が必要になる．これは，古典命題計算の**意味論**をつくることを含んでいる．

古典的には次のようにする．**実現**（realization）という概念を，写像$f: F \to B_2$として導入する．ただし，B_2は2つの要素からなるブール代数である（この代数の1は真と，0は偽と同一視する）．写像fは，集合Pの上での定義から帰納的に拡張される．よって，

$$f(\phi \wedge \psi) = f(\phi) \wedge_2 f(\psi)$$
$$f(\phi \vee \psi) = f(\phi) \vee_2 f(\psi)$$
$$f(\sim\phi) = f(\phi)' \qquad (\forall \phi, \psi \in F)$$

ただし，$\wedge_2$，$\vee_2$，$'$は，B_2における交わり，結び，補元である．

任意の wff ϕを考えよう．$f(\phi)=1$のとき，かつ，そのときにかぎり，fはϕを満足すると言い，$f \vDash \phi$と書く．ϕは，すべての実現によって満足されるとき，**妥当である，**あるいはトートロジー——論理的真理を命題計算に関係づける概念——と言われる．このとき，$\vDash \phi$と書く．論理的真理（妥当性）の記号$\vDash$は，統語論的公理化における定理としての導出可能性（あるいは，証明可能性）の記号に比較される．定理であることは，$\vdash \phi$で表わされる．

古典命題計算に対する**完全性メタ定理**は，簡潔に，

$$\vDash \phi \text{ iff } \vdash \phi$$

と述べている．

さて，どのようにすれば論理の変更が試みられるかを考えよう．まず，純粋

に形式的な統語論的方法を試みることにして，異なる定理の集合が得られるように，公理と（あるいは，または）推論規則のいくつかを変えてみよう．しかし，そのようなやり方に対しては，新しい定理の集合がもはやB_2妥当な論理式を表わしていないと，意味論的な異議をとなえることができる．しかし，逆の方法を試みることもできる．最初に，妥当性の概念を変える．次に，新しい妥当性の概念のもとで妥当なすべての論理式が定理となり，かつ，それらのみが定理となるような公理体系をつくる形式的課題にとりかかる．

形式的にすすむために，実現の定義においてB_2を他の代数Aに置き換えよう．ただし，Aは，論理的結合子に対応させることのできる適当な演算が定義されていると仮定する．よって，$f \in B_2^F$を$f_A \in A^F$〔FからAへの写像全体の集合〕に置き換えて，

$$\phi \text{ is } A\text{-valid iff } \forall f_A (f_A(\phi) \in D)$$

と定義する．ただし，Dは，代数Aに属する要素のある**明示された集合**である．もちろん，A妥当な論理式がちょうどB_2妥当な論理式に対応するということが起きるかもしれない．この場合，Aを古典命題計算の**特性代数**と呼ぼう．この用語法を念頭において，次の基本的な結果を述べて証明しよう．

メタ定理(M)：

任意のブール代数は，古典命題計算の特性代数である．ただし，明示された集合は，このブール代数における1を唯一の要素とする1要素集合である．

あるいは，別の言い方をすると：Bを任意のブール代数とするとき，wff ϕがB妥当となることと，B_2妥当となることとは同値である．

証明：まず，ϕがB妥当ならば，確かにB_2妥当となることに注意しよう．なぜなら，BはつねにB_2を部分代数として含むからである．逆を示すために，ϕがB_2妥当であって，B妥当でないと仮定する．そうすると，あるB実現Fのもとで，ϕは要素$\neq 1$に写像される，すなわち，$F(\phi) \neq 1$．よって，$\sim\phi$は要素$\neq 0$に写像される，すなわち，$F(\sim\phi) \neq 0$．

しかし，**超フィルター定理**（数学的付録，196頁を見よ）により，$F(\sim\phi)$がある超フィルターに含まれることが導かれる．

さて，**準同形定理**（196頁を見よ）を用いることができて，$F(\sim\phi)$を1に

写す準同形写像 $H: B \to B_2$（すなわち，$H(F(\sim\phi))=1$）の存在を示すことができる．しかし，これから $H(F(\phi))=0$ となる．言い換えると，$f=H\circ F$ は，$f(\phi)=0$ なる B_2 実現を与える．よって，ϕ は B_2 妥当でない．これは，仮定に反する．したがって，背理法により，ϕ は B 妥当でなければならない．（証明終り．）

これまで，われわれは，B 実現を，あるいは，より一般的に A 実現を，あたかも意味論的に B_2 実現と同じレベルであるかのように導入してきた．実際には，これは正しくない．B_2 実現は真理値の付値であり，5.2 節（146 頁）で導入した写像 Val に他ならない．B_2 において符号化されている 2 つの真理値は，Val が wff に付与するフレーゲ的**指示**（references）である．しかし，すぐ見るように，B 実現ないし A 実現は，技術的な数学的演習問題以上のものであるならば，wff にフレーゲ的**意義**（senses）を付与することに対応する．それらの実現は，外延的意味論ではなくて，むしろ内包的意味論を提供する．

何が起こっているのかを説明するために，古典物理学の文脈では B 実現がどのように生じるのかを示すことにしよう．

7.3　古典物理学の論理

古典物理学は，物理系の状態を適当な位相空間（phase space）における位置によって表現する．オブザーバブルあるいは物理量は，位相空間上の実数値関数である．よって，状態を知れば，任意の物理量の対応する値についてのどのような問いにも答えることができる．古典物理学は，状態を記述するための適当な位相空間を指定することと，さらに，状態が時間とともにどのように変化するかを述べる規則（運動方程式）を指定することに関わっている．

もし，宇宙の全体的な状態を記述したいと思うならば，個々の系（場や粒子）の位相空間 Ω_r のデカルト積

$$\Omega = \prod_{r \in I} \Omega_r$$

（ただし，I はすべての場と粒子の集合である）を構成することによって，そうすることができる．

基本命題を，宇宙の代表点が Ω のある定まった部分集合内にあると述べる命題として導入しよう．基本命題を表わすのに小文字 p，q，... を用い，Ω の対

応する部分集合を表わすのに大文字 P, Q, ... を用いる．よって，基本命題 p は，宇宙の代表点が Ω の部分集合 P に含まれていると述べ，基本命題 q は，宇宙の代表点が Ω の部分集合 Q に含まれていると述べている，等々．

さて，複合命題にどのような意味が付与されるか考えることにしよう．「p または q」は，宇宙の代表点が，部分集合 P または部分集合 Q 内にあること，すなわち，部分集合 P と Q の和集合 $P \cup Q$ 内にあることを意味する．同様に，「p かつ q」は，代表点が共通部分 $P \cap Q$ 内にあることを意味する．最後に，「p でない」は，代表点が P の外にあること，すなわち，Ω における P の補集合 $\mathscr{C} P$ 内にあることを意味する．

よって，論理的結合子 $\vee$，$\wedge$，$\sim$ と，集合論的演算 $\cup$，$\cap$，$\mathscr{C}$ との間に，同等関係をたてることができる．

$\vee$ は $\cup$ に対応する

$\wedge$ は $\cap$ に対応する

$\sim$ は $\mathscr{C}$ に対応する

実際，われわれは，$\vee$，$\wedge$，$\sim$ が古典物理学で用いられているかぎり，これらの結合子の意味を，先に理解されるブール的集合演算から導かれると見なすこともできる．

正統的には，集合論を提示するとき，ブール演算の方が論理的結合子を用いて定義されると考えている．よって，

$$P \cup Q \underset{Df}{=} \{x \mid (x \in P) \vee (x \in Q)\}$$

$$P \cap Q \underset{Df}{=} \{x \mid (x \in P) \wedge (x \in Q)\}$$

$$\mathscr{C} P \underset{Df}{=} \{x \mid \sim (x \in Q)\}$$

しかし今，論理に対する経験主義的接近法の精神のもとで，これらの定義を実際に逆にする

$$(x \in P) \vee (x \in Q) \underset{Df}{=} x \in (P \cup Q)$$

$$(x \in P) \wedge (x \in Q) \underset{Df}{=} x \in (P \cap Q)$$

$$\sim (x \in P) \underset{Df}{=} x \in \mathscr{C} P$$

基本命題から構成された複合命題が，どのように新しい基本命題を生じるか

を見てきた．さて，論理的真理ないしトートロジーに対応するものは何か．これは，代表点がΩのどこかにあると述べるが，それ以上の正確な限定を与えない命題である．これは，確かに，物理的世界についての真なる言明である．しかし，ある意味で「情報を提供しない」．世界は**なんらかの**状態にあるということを知るのに，世界を見る必要がない．

これらの注意を B 実現に関係づけよう．B として，Ωのベキ集合がなすブール代数をとろう．この代数の1はΩ自身に他ならない．よって，トートロジーは，つねにΩに写像されるwff，すなわち B 妥当な論理式に他ならない．注目すべき第1のことは，メタ定理（M）によってこの仕方で定められるトートロジーのクラスが，真理値の付値すなわち B_2 実現によって定められるトートロジーのクラスと正確に同じであるという点である．ある意味において，この事実が，古典命題論理はなぜ古典物理学に適した論理なのかの理由を説明する．また，基本命題に B 実現によって意味ないし意義を与えたから，さらに，B を B_2 の上へ準同形的に写像することによって真理値の付値を与えることができることにも注意しておこう．これらの準同形写像の構成は「数学的付録」（195頁以下）で論じる．

かなり重要なもう1つの点がある．トートロジーを見出すためには，Ωの代わりに Ω_r を用いることも，まったく同じように可能だろう．B 妥当性は，**任意の** B に対して，B_2 妥当性と同値であることを思い出そう．よって，Ω_r のベキ集合でも，Ωのベキ集合とまったく同じようにうまくいくのである．言い換えると，われわれが全宇宙を扱おうと，その一部のみを扱おうと，同じ論理，すなわち古典命題論理が適用されるのである．

最後に，B として，位相空間の完全なベキ集合をとる必要はない．少しの間，専門的な話しになるが，たとえば，ボレル部分集合の σ 代数を用いることもできる．この場合には，そのような σ 代数のストーン空間は，その代数に非単項超フィルターが存在するために，（ときに文献に見かける主張のように）もとの位相空間と同一ではないことに注意しなければならない（数学的付録，195頁以下を見よ）．

7.4　量子命題論理

量子論理の基本的考えは，古典物理学の位相空間（phase space）に適したブール束 B を，ヒルベルト空間の射影束 $\mathscr{L}$ に置き換えることである（1.4節で与えた議論を参照）．射影作用素の値域，すなわち，ヒルベルト空間の〔閉〕部分空間の用語で考えると，この束における結びと交わりは，「線形包〔の閉包〕」と「集合論的共通部分」の演算に対応している．射影束は，また，直交部分空間に対応する直補元ももっている．

さて，論理結合子 $\vee$，$\wedge$，$\sim$ と，束演算の結び，交わり，直補元との間の同等関係を述べよう．

$\vee$ は，線形包 $\oplus$ に対応する

$\wedge$ は，集合論的共通部分 $\cap$ に対応する

$\sim$ は，直補元 $\perp$ に対応する

量子論理的トートロジーは，古典命題論理の B 妥当な wff と同じように，$\mathscr{L}$ 妥当な wff と同一視される．

しかし，今度は慎重でなければならない．量子論理の**基本命題**によって，何を意味しようとしているのだろうか．われわれが行なう最初の示唆によると，それは，考えている系の状態ベクトルがヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ の部分空間，たとえば U の内にあると主張する命題 $e(U)$ である．u，v，... が基本命題を表わし，U，V，... が対応する $\mathbb{H}$ の部分空間を表わすとしよう．そうすると，'$u\vee v$' は，「系の状態ベクトルが部分空間 $U\oplus V$ の内にある」を意味する．'$u\wedge v$' は，「系の状態ベクトルが部分空間 $U\cap V$ の内にある」を意味する．'$\sim u$' は，「系の状態ベクトルが直交部分空間 $U^{\perp}$ の内にある」を意味する．トートロジーは，系の状態ベクトルが $\mathbb{H}$ 内のどこかにあると主張する真なる命題，しかし，情報を与えない命題である．

基本命題を $\mathbb{H}$ の部分空間に写像したので，次に，部分空間を B_2 の要素，真理値に写すことによって，量子命題計算に対する真理値の付値を与えることができる．ただし，次の許容性基準に従わなければならない．

$\underline{A_1}$：

Val：$\{u\}\to B_2$ が許容付値であるのは，すべての部分空間 M に対して Val$(m)=1$ と $N\leqq M$ が同値になるような，1次元部分空間 N が存在するとき，かつ，

そのときにかぎる.

ここで，≦は部分空間関係を示すのに用いている．許容性基準 A_1 のもとで，量子論理的トートロジーは，期待通りに，すべて B_2 における 1 に写像される．そして，系の状態は N に含まれる単位ベクトルであることが要求される．

重要な点に注意しよう．われわれは，量子論理の考えを，ある指定された量子力学系を記述する特定のヒルベルト空間に関して展開してきた．一般に，その論理は選ばれるヒルベルト空間に依存するだろう．状況は古典命題論理と異なっている．そこでは，任意の B に対する B 妥当性はトートロジーの同じ集合を与える．（異なる有限次元，および無限次元の）可能なすべてのヒルベルト空間の射影束に対する $\mathscr{L}$ 妥当性の概念を用いて，**最小量子論理**を定義することができる．さらに，A_1 許容真理値付値が，一般に，$\mathscr{L}$ から B_2 の上への準同形写像を含まないことに注意しよう．実際，次元が 3 以上のヒルベルト空間に対してそのような準同形写像はそもそも存在しない．これは，結局，量子論理結合子が真理関数でないこと，すなわち，複合命題の真理値が要素命題の真理値によって決定されないことを述べている．たとえば，U と V を $\mathbb{H}$ の 1 次元部分空間とし，対応する基本命題 u と v がともに偽であるとする．それでも，$u \vee v$ は，もし量子力学の状態ベクトルが $U \oplus V$ の内にあれば真となるが，そうでなければ偽となる．

そのような量子論理を古典論理から区別している最も明らかな特徴は，一般に，

$$u \wedge (v \vee r) \equiv (\mathrm{u} \wedge v) \vee (u \wedge r)$$

のような分配規則が成立しないことである．論理的同値性の記号（≡）は，任意の真理値付値のもとで，両辺の命題が同一の真理値をとることを意味する．これは，1.4 節で証明したように，$\mathscr{L}$ が分配束でないことにより量子論理において明らかに破れる．

7.3 節で，古典物理学においてオブザーバブルは位相空間の上の実数値関数であることを注意した．形式的には，オブザーバブル Q を，写像 $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ と表現できる．さて，**新しい**種類の基本命題「Q は集合 Δ のなかに値をもつ」を考えよう．5.2 節の表記法を少し変えて，この言明を $(\Delta)_Q$ と表わそう．しかしここでは，$(\Delta)_Q$ と基本命題 $e(P)$——これは，代表点が Ω の部分集合 P

の内にある，と述べる——との間の単純な論理的同値関係が得られる，

$$(\Delta)_Q \text{ iff } e(Q^{-1}(\Delta))$$

よって，系の状態についての基本命題の真理値を知れば，オブザーバブルの値に関する新しい種類の基本命題の真理値について情報がただちに与えられる．

量子論理において，これはどのようになるだろうか．$|\phi\rangle \in \mathrm{ran}(P_Q(\Delta))$ の場合は，

$$\mathrm{Prob}(\Delta)_Q^{|\phi\rangle} = 1$$

である．これは，命題 $(\Delta)_Q$ の主張を「Q の所有値は集合 Δ の内にある」と実在主義的に解釈するならば，単純に $(\Delta)_Q$ の真理性を主張することと，とにかく整合的である．このように考えると，図式的に，

$$(\text{ある } U \leqq \mathrm{ran}(P_Q(\Delta)) \text{ に対して } e(U)) \rightarrow (\Delta)_Q$$

と言うことができる．（→は，ここでは，実質含意のメタ言語的記号として用いられていることに注意しよう．）

これは，$(\Delta)_Q$ の真を主張するための十分条件を与える．しかし，必要条件，すなわち，$(\Delta)_Q$ の偽を主張するための十分条件については何も述べていない．この問題には次の章でもどることにしよう．しかしまず，$e(U)$ のような基本命題に作用する量子論理結合子が，オブザーバブルの値についての $(\Delta)_Q$ のような命題によって，ともかく翻訳可能な状況では，どのように翻訳されるかを見ることにしよう．

縮退のない離散的なスペクトル $\{q_1, q_2, \ldots\}$ をもつある作用素 Q を考えよう．固有ベクトル $|q_1\rangle, |q_2\rangle, \ldots$ によって生成される部分空間を，Q_1，$Q_2, \ldots$ で表わそう．そうすると，

$$e(Q_1) \rightarrow (\{q_1\})_Q$$

$$e(Q_2) \rightarrow (\{q_1\})_Q \quad \text{等々}$$

言葉で述べると：

量子力学的状態が Q_1 の内にあれば，Q は値 q_1 をもつ．

量子力学的状態が Q_2 の内にあれば，Q は値 q_2 をもつ．　等々．

よって，

$$e(Q_1) \vee e(Q_2) (\equiv e(Q_1 \oplus Q_2))$$

$$\rightarrow (\{q_1, q_2\})_Q (\equiv (\{q_1\} \cup \{q_2\})_Q)$$

この結果が述べているのは，$e(Q_1)$ と $e(Q_2)$ の量子論理的選言を主張するときには，「または」を**古典的な**意味で用いて「Q は，値 q_1 または値 q_2，をもつ」と主張することが許される，ということである.

測定結果を用いて表現すると，量子論理的選言は測定結果がつねに，q_1 または q_2，であると述べている．これは，古典的選言と比べられるべきであり，後者は，測定結果がつねに q_1 であるか，または，つねに q_2 であると主張している．〔「つねに」を「確率1で」の意味にとると分かりやすい.〕

相違点は，否定

$$\sim e(Q_1)(\equiv e(Q_1^\perp)) \to (\mathscr{C}\{q_1\})_Q$$

に関してより明瞭になる．ただし，$\mathscr{C}\{q_1\}$ は，$\{q_1, q_2, \ldots\}$ における $\{q_1\}$ の補集合，すなわち，$\{q_2, q_3, \ldots\}$ を表わしている.

測定結果の用語を用いると，量子的否定は，Q の測定結果がけっして q_1 でないを含意するが，古典的否定は，測定結果がつねに q_1 であるのではないを含意するだろう.

いままで述べてきた説明から明らかなことは，量子論理は，古典論理に対抗しているのではなくて，異なる種類の複合命題の表現に対して，古典論理に代わるものである．たとえば，選言はヒルベルト空間における量子力学的状態ベクトルの位置の指定が完全でないことを意味するが，これは，古典論理的選言が意味する不完全さとは異なる種類のものである．実際，射影束を「読む」ときの量子論理的選言の意味は，ヒルベルト空間の集合論的構造の言葉につねに「翻訳」可能であり，そして，集合論的構造は，すでに見たように古典論理を含んでいる.

この節を，2つの注意を与えて終えることにしよう：

1. 量子論理において，ド・モルガンの法則は成立する.

$$u \wedge v \equiv \sim((\sim u) \vee (\sim u))$$

$$u \vee v \equiv \sim((\sim u) \wedge (\sim u))$$

これは，ヒルベルト空間の任意の部分空間 U と V に対して，

$$(U^\perp \oplus V^\perp)^\perp = U \cap V$$

$$(U^\perp \cap V^\perp)^\perp = U \oplus V$$

が成立するという事実から導かれる．これは，量子論理において，古典論理の

場合とまったく同じように，$\wedge$を$\vee$と$\sim$によって，あるいは，$\vee$を$\wedge$と$\sim$によって定義可能であることを意味する．

2．われわれは，これまでもっぱら，妥当性の概念について話すのに，論理的導出に関係させるのではなくて，むしろ，論理的真理に関係させてきた．しかし，「uはvを論理的に導出する」（記号的に，$u \vDash v$と書く）を，

$$\text{すべての実現}\, f_{\mathscr{L}}\, \text{に対して，}\, f_{\mathscr{L}}(u) \leqq f_{\mathscr{L}}(v)$$

と定義することができる．許容付値の用語で述べると，これが意味しているのは，uを真にする任意の付値がvを真にするということである．さて，古典命題計算においては，論理的導出**関係**は，実質含意の**演算**によって，論理的真理の概念に還元することができる．形式的には，

$$p \vDash q \text{ iff } \vDash p \to q$$

であり，かつ，

$$(p \to q) \equiv (\sim p) \vee q$$

量子論理においては，このいわゆる**演繹メタ定理**に対応するものはない．なぜなら，実質含意の役割を正確に演じる結合子が存在しないからである．

7.5　パトナム状態と実在主義

基本命題（Δ）$_Q$の考察にもどろう．この命題は，オブザーバブルQがQの可能な値の部分集合Δ内の値を所有すると主張している．量子力学の実在主義的解釈をとるならば，このようなすべての命題が明確に定義された真理値をもっていてほしい．（事実上，パトナムによって）次のような案が提出された．まず最初に，$(\Delta)_Q$を$P_Q(\Delta)$に写し，次に，$P_Q(\Delta)$を命題

＊「系の状態$|\phi\rangle$は，$P_Q(\Delta)$の値域内にある」

と結びつける．系の量子力学的状態がそのような$|\phi\rangle$であるならば，$(\Delta)_Q$の真を主張できることはすでに論じた．しかし，量子力学的状態が$P_Q(\Delta)$の値域にないと仮定しよう．それでも，われわれは$(\Delta)_Q$の真を主張したいと思うかもしれない．しかし，このとき，命題＊における状態$|\phi\rangle$の意義は何であろうか．われわれは，それを，系に結び付けられた「実在的」状態，あるいはパトナム状態と呼ぶ．それは，量子力学的状態から厳密に区別されなければならない．量子力学的状態が$\mathbb{H}$の部分空間Uの内にあると述べる基本命題

$e(U)$ に対応して，さらに，別の種類の基本命題を導入し $e'(U)$ の記号で表わす．これは，パトナム状態が $\mathbb{H}$ の部分空間 U の内にあると主張する命題である．特に，命題 $(\Delta)_Q$ は $e'(\mathrm{ran}(P_Q(\Delta)))$ として翻訳される．

前節で量子力学的状態の位置を指定する e 命題を扱った方法に正確に対応させて，パトナム状態の位置を指定する e' 命題に対する量子論理的結合子を考え，それによって，いま，命題 $(\Delta)_Q$ に対する量子論理を導入する．再び，u，v，... を用い，今度は，基本命題 $e'(U)$, $e'(V)$ を表わすことにして，われわれの実在主義的意図を反映する真理値付値を探そう．そのような付値に対して次の許容性基準が要請されるように思われるだろう．

$\underline{A_2}$：

Val：$\{u\}\rightarrow B_2$ が許容付値であるのは，次の条件が満足されるとき，かつ，そのときにかぎる，

1. $\mathrm{Val}(u)=1$ iff $\mathrm{val}(\sim u)=0$,
2. $\mathrm{Val}(n)=1$ かつ $N\leqq M$ ならば，$\mathrm{Val}(m)=1$,
3. $\mathbb{H}$ の任意の正規直交基底 $\{|q_i\rangle\}$（ただし，$\{q_i\}$ はある極大オブザーバブル Q の固有値とする）において，ある j に対して $\mathrm{Val}(q_j)=1$．よって，1 と 2 から，$\mathrm{Val}(q_i)=0$, $\forall i\neq j$.

ここに，Q_j を，前と同じように，$|q_j\rangle$ が生成する 1 次元部分空間として，q_j は，命題 $e'(Q_j)$ に対する便宜的な略記法である．それは，また，命題 $(q_j)_Q$ をも表わしている．

A_2 における最初の条件が要請されるのは，任意のオブザーバブル Q（極大であれ，非極大であれ）に対して，「$(\Delta)_Q$ が真である」と「$(\mathscr{C}\Delta)_Q$ が偽である」が同値になることを保証するためである．ただし，$\mathscr{C}\Delta$ は，Q の可能な値の集合における Δ の補集合である．

A_2 における第 2 の条件は，

$$\Delta\subseteq\Delta' \text{ ならば，} (\Delta)_Q\rightarrow(\Delta')_Q$$

を保証する．第 3 の条件は，すべての極大オブザーバブル Q が一意の確定値をもつことの保証に不可欠の条件である．非極大オブザーバブルが一意の確定値をもつことも導かれる．なぜなら，縮退している固有値に対応する部分空間それぞれは，確定した真理値に写されるからである．もしそれが 1 ならば，他

のすべての固有空間は，条件1を適用することによって0に写される．2と3を用いると，確かに，1つの固有空間は1に写される．しかし，A_2にはただちに問題が生じる：

1. 条件3は，系が多くの異なるパトナム状態——実際，すべての異なる正規直交基底それぞれに対して異なる状態——を同時にもつことを示す．これは,「状態」なる語がきわめて珍奇な意味で用いられていることを示している．そして，量子力学的状態の位置の場合と類似的に，ヒルベルト空間におけるパトナム状態の位置についての命題に量子論理を適用することに対する正当化が，まったく不適切であることを示している．事実，われわれは，パトナム状態について話すことをまったく止めてしまって，$(\Delta)_Q$型の命題に直接量子論理を単に押しつけてもよいであろう．実際には，そうすることを直観的に正当化することはできないけれども，そうした場合にはどうなるかを見ておこう．

2. しかしながら，より深刻な困難は，3以上の次元のヒルベルト空間に対してA_2許容付値が存在しないことである．これは，5.1節で証明した2色定理から直接導かれる．ただし，色写像はValで置き換える．これは，量子論理が，結局，実在主義問題で助けにならないことを意味するだろうか．パトナムは次のような論証を提出した．量子論理において，実在主義が意味しているのはすべてのオブザーバブルが値をもつことである．しかし，それがもつ値は存在しない．

N次元のヒルベルト空間における極大オブザーバブルQを考えよう．このとき，パトナムは，言明「Qが値をもつ」を選言$q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_N$と同一視する．これは真であるだけでなく，量子論理的トートロジーである．なぜなら，これは，全ヒルベルト空間（$Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_N = H$）に対応しているからである．しかしながら，パトナムが言うには，これは，q_jが真となるある特定可能なjが存在することを意味しない．さて，古典論理においては，選言は存在主張を伴っている．われわれは，

$$(\exists i)q_i \equiv q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_N$$

と書くことができる．パトナムもこの結果を有効なものとして保持する．しかし，彼が$(\exists i)q_i$によって意味することを**定義する**ために，これを用いるのである．よって，量子論理において，$(\exists i)q_i$は，q_iが真となるiを特定できる

ことを意味し**ない**．しかし，そのときには，$(\exists i)q_i$ の真理性は所有値の実在主義とどのような関係をもつことになるのか，と問うことになるだろう．

さて，$\{|q_i\rangle\}$ とは異なる固有ベクトル $\{|r_i\rangle\}$ をもつ他の極大オブザーバブル R を考えよう．よって，Q と R は可換でない．にもかかわらず，

$$(\exists j)r_j \underset{Df}{=} r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_N$$

も，トートロジー的に真である．

パトナムは，われわれに，2つの言明

$$S_1 : (\exists i)q_i \wedge (\exists j)r_j$$

$$S_2 : (\exists i)(\exists j)(q_i \wedge r_j)$$

を考えるようにと言う．古典論理において，S_1 と S_2 は**分配法則**によって同値である．これは，S_1 と S_2 を展開形

$$S_1 : (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_N) \wedge (r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_N)$$

$$\begin{aligned} S_2 : &(q_1 \wedge r_1) \vee (q_1 \wedge r_2) \vee \ldots \vee (q_1 \wedge r_N) \\ &\vee (q_2 \wedge r_1) \vee (q_2 \wedge r_2) \vee \ldots \vee (q_2 \wedge r_N) \\ &\vdots \\ &\vee (q_N \wedge r_1) \vee (q_N \wedge r_2) \vee \ldots \vee (q_N \wedge r_N) \end{aligned}$$

で書いてみれば，ただちに分かる．しかし，量子論理において，S_1 と S_2 は論理的に同値ではない．S_1 はトートロジーであるが，S_2 は論理的矛盾である．

さて，パトナムの注意によると，S_1 は実在主義を反映している――それが，S_1 が真であること，実際，トートロジー的に真であることの理由である――，他方，S_2 が論理的矛盾であるという事実は，相補性――系が Q と R に対して同時に値を所有すると述べることは論理的矛盾である――を表現している．

しかし，この種の話し方は，真に量子力学の理解に役立つだろうか．次のように論じられるかもしれない．それは，量子力学の不可思議さを解く助けになるどころか，単に，1つの不可思議さを別の不可思議さに置き換えたにすぎない．すなわち，われわれがくり返し唱えてきた標語の類いをいかに理解すべきかという不可思議さを，他の不可思議さに換えたにすぎない．量子論理に対する実在主義にふさわしい意味論を，たとえば，A_2 許容付値によって生み出そうとするどのような試みも，コッヘン－シュペッカーのパラドクスと衝突するように思われる．しかし，それをしなければ，実在主義を保持していると本当

に言えるだろうか.

注と参考文献

論理の哲学に関する一般的な入門的参考書は，Haack (1978) である．特性代数 (characteristic algebra)(あるいは，matrix) の概念は，もともとリンデンバウムとタルスキーによって，定理であること (theoremhood) という概念を代数的に表現するために導入された．われわれは，用語法を統語論的文脈ではなくて，むしろ意味論的文脈に合わせた．古典論理の専門的な細部に関して最もすぐれた参考書は，Bell and Machover (1977) である．

本章では，非分配的2値量子論理というきわめて特殊な型に関係してきた．参照すべきもとの文献としては，Birkhoff and von Neumann (1936), Putnam (1969), Putnam (1974) が含まれる．われわれは，パトナムの見解として，これらの文献で表わされたものに関係してきた．かれ自身の見解は，その後修正されてきている．たとえば，Friedman and Putnam (1978), Putnam (1981) を見よ．許容真理値付値の問題について，われわれは Friedman and Glymour (1972) に従った．多様な異なる量子論理の一般的な状況については，Jammer (1974) の特に第8章，van Fraassen (1974), Beltrametti and van Fraassen (1981), Holdsworth and Hooker (1983) を見よ．

量子論理のパトナムの見解に対する有益な哲学的批判は，Dummett (1976) が提出している．本文で言及した最小量子論理の概念は，Goldblatt (1974) に詳説されている．量子論理についての他の鋭い文献は，Bell and Hallett (1982) である．量子論理において実質含意の代用としての条件法を定義する際にどこまで行けるかについての明快な議論は，Hardegree (1974) を見よ．

8 結　び

本書では，主として，所有値についての単純な実在主義が出会う困難に関係してきた．これらの困難に対する多くの哲学者の側の反応は，われわれはそのように単純であってはいけない，と言う．たとえば，量子論理学者は，実在主義を採るならばオブザーバブルに特定の値を帰属させる基本命題すべてに具体的に真理値を付値しなければならなくなるということを単に否定し，そう否定することによってコッヘン－シュペッカーのパラドクスが実在主義的意味論に提出する問題そのものを，認めない．

また，第2章で見解 C と名づけた相補性解釈は，系が全体的文脈から独立に性質を所有するという意味での分離可能性を，事実上，否定している．この存在論的意味における分離可能性を否定することは，第4章で与えたベルの不等式の導出をも阻止し，第6章で導かれた矛盾を避ける1つの方法を与えるであろう．分離可能性は，第6章では，OLOC 原理として言及された．

もし，われわれが単純で**ある**ことを欲して，所有値の分離可能実在主義を保持しようと思うならば，第4章で与えた論証が述べているのは，――私は，むしろもっともなものとして，受け容れたいが――遠隔作用（第6章で，ELOC 原理の破れと呼んだもの）を認めなければならないということである．これは，特殊相対論に対して深刻な問題を生じると考えられるかもしれない．しかし，制御可能な情報をそのような非局所性の採用によって送達することが不可能であるという事実は，このような関連で念頭に置くべききわめて重要な点である．その代わりに，第2章の見解 B によると，もとの EPR の論証から，第3章で提示したように，再び非局所性（LOC_1 の破れ）が導かれる．しかし，この形の非局所性，つまり，遠隔地点における可能性を現実化するという非局所性は，特殊相対論の古典的な親しんだ場所からはあまりにも遠く離れすぎているため

に，シモニーの言う「平和共存」を認めることができないように思われるかもしれない．

第4章で論じたもう1つの重要な問題は，ベルの不等式を導く際の決定主義の役割である．ここでの結論は，不等式を導くときのある反事実的推論を正当化するためには決定主義が必要であるというのであった．しかし，決定主義を諦めるならば，確率的隠れた変数理論について4.4節の議論が示しているのは，局所性と完全性（再び，事実上は分離可能性に同値である）からベルの不等式が導かれるということである．さらに，因子分解可能な確率的理論は，けっして厳密な相関や反相関の場合を取り込むことができない．4.4節で，分離不能性がどのように「遠隔感応」に等しいかを論じた．再び，これは，——光円錐の外部に，すなわち空間的（space-like）に離れた点に**因果的**過程が及ぶことを禁じると解釈される——特殊相対論の制約と両立すると見なされるだろう．

よって，やはりこうなる——ある種の遠隔感応，あるいは（概念的には異なる）分離不能性が，実在の量子論的な見方を理解するどの合理的な試みにも組み入れられるように思われる．ポパーが注意したように，われわれの理論は「世界を把握するためにわれわれが考案した網」である．量子力学がかなり奇妙な魚を捕らえてしまった事実を直視すべきであろう．

注と参考文献

実在主義に関する最近の哲学的議論については，Leplin（1983）を見よ．非局所性と特殊相対論との平和共存は，Shimony（1978）が議論にのせた．特殊相対論に対する非局所性の関係の議論をさらに知りたければ，特に，Redhead（1983）と（1986b）を見よ．ポパーからの引用は，Popper（1982a），p. 42に見ることができる．*Logik der Forschung*（Popper（1934））につけられたノヴァリスからの標語〔「理論は網である：それを投げる者のみが捕らえるであろう」〕をも参照．

スタップは，決定主義，あるいは非両立的オブザーバブルに対する結合確率分布を仮定しないベルの不等式の証明を試み，展開し続けている．最近の見解はStapp（1989）にある．批判については，Clifton *et al.*（1990）を見よ．

信号送達不能定理のさらに進んだ議論は，Clifton and Redhead（1988）にある．そこでは，古典物理学に対する違反を含む信号送達の提案が反駁されている．

数学的付録

I. 素朴集合論

集合 S とは，S の**要素**と呼ばれる対象の集まりであり，さらに，同じ要素からなる集合を同一の集合と見なすという意味において，集合は要素によって定まる．x が S の要素のとき，$x \in S$ と書く．有限個の要素 x_1，x_2，...，x_n をもつ集合は，$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ とも書く．より一般に，集合は，その要素のみが共有する性質 P によって決定される．性質 P をもつ対象全体の集合は，$\{x \mid P(x)\}$ で表わされる．一般に，このような方法によって集合を生成すると，有名な矛盾が生じる．われわれは，考察される集合が矛盾を生じるほど「大きく」ない，と仮定しよう．

2つの集合 A と B の**和集合**とは，集合

$$A \cup B \underset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

のことである．ただし，「または」は排反でない意味に理解する．2つの集合 A と B の**共通部分**とは，集合

$$A \cap B \underset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

のことである．集合 A の**補集合**とは，集合

$$\mathscr{C} A \underset{Df}{=} \{x \mid x \notin A\}$$

のことである．ただし，$\notin$ は「要素でない」を意味する．要素をもたない**空集合**を $\emptyset$ で表わす．

$$\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$$

のとき，集合 A は B の**部分集合**であると言われる．この場合，$A \subseteq B$ と書く．$\subseteq$ は，集合論的包含関係と称される．

A が B の部分集合であって，かつ，等しくはないとき，A は B の**真部分集合**と呼ばれ，このことを

$$A \subset B$$

で表わす．

空集合 $\emptyset$ は，他の〔したがって，空でない〕すべての集合の真部分集合となる．

集合 A の部分集合全体からなる集合は，A の**ベキ集合**と呼ばれる．

順序 n 組〔順序のついた n 個の対象からなる組〕を

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

で表わす．よって，n 個の集合 A_1, A_{21}, ..., A_3 の**デカルト積**〔直積〕は，

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) | x_1 \in A_1$ かつ $x_2 \in A_2$ かつ ... かつ $x_n \in A_n\}$

となる．集合 A_1, A_2, ..., A_n それぞれから採った要素間の ***n* 項関係**は，ちょうどデカルト積 $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$ の部分集合〔その n 項関係が成立する順序 n 組全体からなる部分集合〕になる．

2つの集合それぞれから採った要素間の特殊な2項関係が，特に重要である．A から B への**写像**ないし**関数** f は，$f: A \to B$ と書かれ，$x \in A$ かつ $y \in B$ なる順序対(つい)の集合になる．x は，A 全体の上を動き，各 x に y が一意に〔ただ1つ〕対応する．y を f による x の像といい，$f(x)$ と書く．y に対応させられる x も一意のとき，関数は1対1であるという．そうでないときは，多対1である．

集合 A は，f の**定義域**（dom(f)）といわれる．定義域の像を f の**値域**（ran(f)）という．ただし，定義域に含まれる要素の集合の像とは，上に述べたように各点に対して定義された像からなる集合である．一般に，ran(f) は，B の真部分集合である．ran(f)$=B$ のとき，関数は，単に「B への」ではなくて，「B の上への」関数といわれる．

任意の集合 $Y \subseteq$ ran(f) を考えよう．f による Y の**逆像**を集合

$$\{x \mid x \in \mathrm{A} \text{ かつ } f(x) \in Y\}$$

で定義する〔一般には，$Y \subseteq B$ に対して定義される〕．これを $f^{-1}(Y)$ と書く．この記法は，すべての関数 f に**逆関数** f^{-1} を対応させることができる，といっているのではない．逆関数が存在するのは，f が1対1のときのみである．その場合には，f^{-1} は，$f^{-1}(y)=x$ で定義される．ただし，$y \in$ ran(f), $x \in$ dom(f), $y=f(x)$．f が多対1で，逆関数が存在しないときでも，逆像はつねに存在することによく注意しよう．

任意の集合 $X \subseteq A$ を考えよう．このとき，f の X への**制限**を，$f|X$ と書くことにして，

$$f|X(x)=f(x) \quad (\forall x \in X)$$

なる関数 $f|X: X \to B$ と定義する．A から B への関数全体の集合を，B^A で表わす．2つの関数の合成関数 $g \circ f: A \to C$ を

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$

で定義する．ただし，f は A から B への関数，g は B から C への関数であり，

$x \in A$.

関数の概念を用いると，デカルト積の考えを次のように一般化できる．$i \in I$ を添数集合とする集合族 $\{A_i : i \in I\}$ を考え，

$$\prod_i A_i = \{f : I \to \bigcup_i A_i \mid f(i) \in A_i\}$$

と定義する．ただし，$\bigcup_i A_i$ は，すべての集合 A_i の要素すべてを要素とする集合のうちで最小の集合である．$\prod_i A_i$ と $\bigcup_i A_i$ は，集合の任意の族に対して，デカルト積と和集合を一般化したものである．

II. 有限次元ベクトル空間

ベクトル空間とは，順序対 (V, K) であって，V はベクトルと呼ばれる要素の集合であり，K は**スカラー**と呼ばれる要素からなる**体**である〔実数体と複素数体がよく用いられる〕．V において，**加法**という**内的2項演算**が定義され，$+$ で表わされる．これは，結合法則と交換法則を満足する．V には特別な要素，**ゼロ・ベクトル**が存在し，0 と書かれ，

$$0 + x = x, \ \forall x \in V$$

なる性質をもつ．V の任意の要素には，

$$\forall x \in V, \ \exists y \in V : x + y = 0$$

の意味で，**逆元**が対応している．また，**スカラー倍**という外的2項演算が，次の性質をもつものとして定義される．任意の $\lambda, \mu \in K$; $x, y \in V$ に対して，

$$\lambda x \in V$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$
$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$$

ベクトル空間の**線形作用素**とは，

$$Q(x_1 + x_2) = Q(x_1) + Q(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in V)$$
$$Q(\lambda x) = \lambda Q(x) \quad (\forall \lambda \in K, \forall x \in V)$$

なる**写像** $Q : V \to V$ のことである．ベクトル空間の**内積**とは，デカルト積 $V \times V$ で定義されたスカラー値関数，すなわち，$\phi : V \times V \to K$ であり，$\phi((x, y)) = \langle x | y \rangle$; $(x, y \in V)$ と書く．以後，K が複素数体の場合にかぎることにしよう．内積は，次の性質をもつ（ただし，* は共役複素数を示す）:

$$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$$

$$\langle x|x\rangle \geqq 0$$
$$\langle x|x\rangle = 0 \text{ iff } x=0$$
$$\langle x|\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1\langle x|y_1\rangle + \lambda_2\langle x|y_2\rangle$$
$$\langle \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2|y\rangle = \lambda_1^*\langle x_1|y\rangle + \lambda_2^*\langle x_2|y\rangle$$

$||x|| \underset{Df}{=} (\langle x|x\rangle)^{1/2}$ は，x の**ノルム**といわれる．

ベクトル空間上の**線形汎関数**とは，写像 $\alpha: V\to K$ であって，

$$\alpha(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) = \lambda_1\alpha(x_1)+\lambda_2\alpha(x_2) \quad (\forall\lambda_1,\ \lambda_2\in K,\ \forall x_1,\ x_2\in V)$$

の性質をもつ．ベクトル空間上の線形汎関数全体の集合は，それ自身ベクトル空間であって，V の**双対**空間といい，V' と書く．$\alpha\in V'$ かつ $x\in V$ として，V' と V の間の 1 対 1 対応，$x=\phi(\alpha)$，を

$$\alpha(y) = \langle x|y\rangle \quad (\forall y\in V)$$

によって，定義する．任意の α に対して，定義の条件を満たす x が一意に存在することは，定理である〔有限次元 V を考えていることに注意〕．

V のベクトルの集合 $\{e_1 \dots e_N\}$ が**基底**であるとは，任意の $x\in V$ が

$$x = \sum_i^N \lambda_i e_i, \quad \lambda_i\in K$$

の形に一意に表わせることである．基底が**正規直交基底**となるのは，さらに，正規直交性条件

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

を満たすことである．ただし，δ_{ij} は，クロネッカーのデルタ記号で，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

数 N はベクトル空間の次元である．

本文においては，ディラックの記法に従って，ベクトルをケット記号 $|\rangle$ で包んでいる．よって，$Q(x)$ は $Q|x\rangle$ と書かれる．

線形作用素 Q の**行列表現**とは，$N\times N$ 行列 (Q_{ij}) で，

$$Q_{ij} = \langle e_i|Q(e_j)\rangle$$

によって定義される．ベクトル x を表わす**列行列**は，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix}$$

よって，明らかな関係

$$Qe_j = \sum_{i=1}^{N} Q_{ij} e_i$$

$$Qx = \sum_{i=1}^{N} \mu_i e_i$$

が得られる．ただし，

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{N} Q_{ij} \lambda_j$$

あるいは，行列記法では，

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & \ldots & Q_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{N1} & \ldots & Q_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix}$$

線形作用素 Q の**共役**作用素を，$Q^\dagger$ と書き，関係

$$\langle x | Q^\dagger(y) \rangle = \langle y | Q(x) \rangle^*, \ \forall x, \ y \in V$$

によって定義する．$Q = Q^\dagger$ ならば，Q を**自己共役**作用素という．$Q^\dagger = Q^{-1}$ ならば，**ユニタリ**作用素という．ただし，Q^{-1} は Q の逆写像である．（すべての作用素は，共役作用素をもつが，もちろん，つねに逆作用素をもつとはかぎらない．）Q の**固有値**とは，ある 0 でない $x \in V$ に対して，

$$Q(x) = q_a x$$

を満たす数 q_a である．x は，固有値 q_a に属する**固有ベクトル**といわれる．たかだか N 個の異なる固有値が存在する．Q が自己共役ならば，すべての固有値 q_a が実数であることは，定理である．この場合，固有ベクトルの集合 $\{x_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ が V の正規直交基底をなすように選ぶことはつねに可能である．x_i に対応する固有値を q_i で表わす．いくつかの q_i が等しいことがある．このとき，Q は縮退しているという．Q が縮退していないならば，よって N 個の異なる固有値が存在するならば，しばしば**極大**といわれる．ディラックの記法では，x_i を $|q_i\rangle$ と書く．

射影作用素は，自己共役**ベキ等**線形作用素である．P が射影作用素ならば，ベキ等という性質は，

$$P^2 = P$$

によって表わされる．P の固有値が 0 か 1 であることはすぐわかる．射影作用素の値域がベクトル空間の部分空間となることは，定理である．ここに，部分空間 U とは，V の**部分集合**であって，加法とスカラー倍の演算のもとで閉じていることをいう．$P_{|q_i\rangle}$ が，$|q_i\rangle$ の張る部分空間を値域とする射影作用素ならば（ベクトルの集合が部分空間を**張る**とは，部分空間のすべてのベクトルがこの集合の要素の 1 次

結合として表わせることである），**スペクトル定理**は，

$$Q=\sum_{i=1}^{N} q_i P_{|q_i\rangle}$$

と表現され，これは本文で証明してある．

$P_{|q_i\rangle}$ は，直交関係

$$P_{|q_i\rangle}\cdot P_{|q_j\rangle}=\delta_{ij} P_{|q_i\rangle}$$

を満足する．

自己共役作用素 Q の関数は，関係

$$f(Q)\underset{Df}{=}\sum_{i=1}^{N} f(q_i) P_{|q_i\rangle}$$

によって，定義される．2つの自己共役作用素 Q と R が可換ならば，適当な関数 f と g に対して，

$$Q=f(S)$$
$$R=g(S)$$

なる極大自己共役作用素 S が存在することは，定理である．他方，もし $Q=f(S)$ で，写像 f が1対1でないならば，$Q=g(R)$かつ S と R が非可換であるような，他の極大作用素 R がつねに存在する．これらの結果は，本文で証明してある．2つの作用素が可換ならば，それらを同時に対角化する基底を選ぶことがつねに可能である．しかし，2つの作用素が非可換のとき，あらゆる場合に，それらは共通の固有ベクトルをもたないことが導かれるのではない．ただ，すべての固有ベクトルを共有することが不可能なのである．

ベクトル空間 V と W から選んだ**2つのベクトル** v と w **のテンソル積**は，$v\otimes w$ と書かれ，関係

$$\left(\sum_i a_i v_i\right)\otimes\left(\sum_i b_i w_i\right)=\sum_{i,j} a_i b_j v_i\otimes w_j$$
$$(\forall v_i\in V,\ \forall w_i\in W,\ \forall a_i,\ b_i\in K)$$

を満足する．**2つのベクトル空間** V と W **のテンソル積**とは，2つの空間から選んだベクトルのテンソル積のすべての1次結合の集合であり，$V\otimes W$ と書かれる．(より形式的には，双対空間 V' と W' のデカルト積上で定義された双線形汎関数の空間である．) $V\otimes W$ 自身は，基底 $\{e_i\otimes e'_j\}$ をもつベクトル空間である．ただし，$\{e_i\}$ は V の基底であり，$\{e'_j\}$ は W の基底である．

A は V に作用し，B は W に作用するとして，2つの線形作用素 A と B のテンソル積は，$A\otimes B$ と書かれる．これ自身 $V\otimes W$ 上の線形作用素であり，関係：

$$(A\otimes B)(v\otimes w)=A(v)\otimes B(w),\ \forall v\in V,\ \forall w\in W$$

によって定義される．A と C が V に作用し，B と D が W に作用するときは，きわめて役にたつ関係：

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$$

に注意しよう．これは，定義からただちに導かれる．

この結果の特別な場合として，

$$(A\otimes I)(I\otimes B)=A\otimes B$$

ただし，I は，すべてのベクトルをそれ自身へ写す**恒等**作用素を表わす．自己共役作用素 A と B，および，任意の関数 f と g に対して，

$$f(A\otimes I)=f(A)\otimes I$$

同様に，

$$g(I\otimes B)=I\otimes g(B)$$

にも注意しよう．

無限次元ベクトル空間に関する注意

有限次元ベクトル空間に対するすべての具体的な表現は，ベクトル空間の構造に関して同形である．よって，与えられた次元 N の抽象的ベクトル空間は，実質的にただ1つしか存在しない．N が無限になると，状況はより複雑になる．カテゴリー的構造(すなわち，そのすべての表現が同形になるような構造)を分離するために，位相的（topological）性質の公理をつけ加える必要がある．量子力学のフォン・ノイマンの定式化の場合に選び出された構造は，**ヒルベルト空間**と呼ばれる．

ヒルベルト空間とは，内積ベクトル空間であって，さらに，**可分性**（その空間全体において**稠密な**ベクトルの可算無限集合が存在する）の条件と，**完備性**（その空間におけるベクトルのすべてのコーシー列はその空間内のベクトルに収束する）の条件を満たす空間である．すべての有限次元内積空間は，自動的に，ヒルベルト空間になる．なぜなら，これらの付加された公理は自明な定理になるからである．しかし，無限次元の場合，可分性と完備性を他の公理から証明することができないので，要請せざるをえないのである．無限次元ヒルベルト空間の2つの有名な表現は，2乗可積分（つまり，ルベーク積分の意味で2乗可積分）**関数**の空間 L_2 と，2乗総和可能**数列** l_2 である．ヒルベルト空間の構造に関して，L_2 と l_2 の同形性は，シュレーディンガーの波動力学とハイゼンベルクの行列力学の同等性を数学的に反映するものである．これは，数学の文献では，リース－フィッシャーの定理の本質的内容として知られている．

III. 束　論

半順序集合（poset）とは，次のような2項関係≦をもつ集合Sである：

1. 反射的：$a \leqq a$，$\forall a \in S$
2. 反対称的：$a \leqq b$ かつ $b \leqq a \rightarrow a = b$，$\forall a, b \in S$
3. 推移的：$a \leqq b$ かつ $b \leqq c \rightarrow a \leqq c$，$\forall a, b, c \in S$

2つの要素aとbの**最小上界**あるいは**結び**を$a \vee b$で表わし，**最大下界**あるいは**交わり**を$a \wedge b$で表わす．ただし，最小上界とは，半順序において，$a \leqq c$ かつ $b \leqq c$ なるcのうち「最小」の要素のことであり，同様に，最大下界とは，$c \leqq a$ かつ $c \leqq b$ なるcのうち「最大」の要素のことである．

束とは，半順序集合であって，要素のすべての対が最小上界と最大下界をもつものである．束がゼロ元と単位元（それぞれ，0と1で表わす）をもつのは，$0 \leqq a$ かつ $a \leqq 1$（$\forall a \in S$）のときである．束の要素aの**補元**とは，$a \wedge a' = 0$ かつ $a \vee a' = 1$ なる要素a'のことである．束は，すべての要素が補元をもつ（一般に補元は一意でない）ならば，**可補的**（complemented）といわれる．束は，任意のa，b，$c \in S$に対して，

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

のとき，**分配的**（distributive）である．

可補分配束は，**ブール**束として知られ，一般に，**ブール代数**と呼ばれている．ブール代数の最もよく知られた例は，ベキ集合代数，すなわち，集合のベキ集合をとって得られる代数である．ベキ集合は，集合的包含関係によって半順序づけられており，この代数の2つの要素の最小上界は，部分集合の和集合であり，最大下界は部分集合の共通部分であり，補元はもとの集合に関する補集合である．少し後に見るように，すべての有限ブール代数は，ベキ集合代数と構造的に同等（すなわち，同形）である．

ブール代数において，各要素は，一意に補元をもち，これは，**直補元**（orthocomplement）であるための次の付加条件を満たす．

1. $(a')' = a$
2. $a \leqq b \leftrightarrow b' \leqq a'$

本文で言及したヒルベルト空間の射影束は，直可補的ではあるが，非分配的である．

ブール代数の準同形写像

ブール代数 B からブール代数 B' への準同形写像とは，ブール演算を保存する写像 $h: B \to B'$ である．つまり，

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$
$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$
$$h(a') = h(a)'$$
$$h(0) = 0$$
$$h(1) = 1$$
$$a \leqq b \leftrightarrow h(a) \leqq h(b)$$

これらの結果の左辺において，ブール演算，0，1は，B におけるものを示し，右辺では，B' におけるものを示す．(上の3番目の性質と，初めの2つのうちのどちらかのみを要請すれば，準同形写像が指定されることに注意しよう．このとき，残りの性質は，証明することができる．）われわれは，特に，ブール代数 B の**2値同形写像**に関心がある．これらの写像は，B から，0と1のみをもつ2要素ブール代数 B_2 の上への準同形写像である．B_2 は，順序が半順序ではなくて全順序となっている唯一のブール代数である（**全**順序とは，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ （$\forall a, b \in S$）が成り立つ順序である）．どのようにしてそのような2値準同形写像を構成するかを示すことにしよう．まず，有限ブール代数(すなわち，n 個の対象の集合上のベキ集合代数——2^n 個の要素をもつ——が典型であるような，有限個の要素のブール代数)の場合を考えよう．

ブール代数 B の要素 a が**原子**といわれるのは，

$$a \neq 0$$

かつ

$$\forall b \in B \ (b \leqq a \to (b = 0 \text{ または } b = a))$$

が成立するときである．**フィルター** F とは，

$$(1) \quad a, b \in F \to a \wedge b \in F$$

かつ

$$(2) \quad (a \in F \text{ かつ } a \leqq b) \to b \in F$$

なる空でない真部分集合 F である．B のすべてのフィルターの集合は，集合的包含関係によって半順序づけられている．**超フィルター**とは，この順序において極大なフィルター（B 自身にはならない）のことである．有限ブール代数において，超フィルターはすべて，原子によって生成される．すなわち，それらは，ある原子 a に

対して $\{b \in B \mid a \leqq b\}$ の形の集合である．数学者は，そのような超フィルターを**単項**超フィルター（principal ultrafilter）と呼んでいる．よって，この結果を表現するのに，有限ブール代数においてすべての超フィルターは単項的である，と述べることができる．

有限ブール代数の 2 値準同形写像を構成するために，任意の原子 a をとり，それによって生成される同伴（単項）超フィルター F_a を構成する．そして，写像 h_a：$B \to B_2$ を

$$h_a(b) = \begin{cases} 1, & (b \in F_a) \\ 0, & (b \notin F_a) \end{cases}$$

によって定義する．この写像が準同形写像であることは容易に分かる．そして，すべての 2 値準同形写像がこの仕方で生じることを示すことができる．これらの結果は，2 つの定理の形で，任意の無限ブール代数に拡張することができる：

超フィルター定理

すべてのフィルターは，ある超フィルターに含まれる．

準同形定理

すべての超フィルター F は，

$$h_F(b) = \begin{cases} 1, & (b \in F) \\ 0, & (b \notin F) \end{cases}$$

によって，2 値準同形写像 $h_F : B \to B_2$ を定める．

しかし，無限ブール代数の場合には，超フィルターは，一般にすべて単項的とはかぎらない．非単項超フィルターの存在は，一般的な場合を複雑にしている特徴である．

ブール代数の表現

すべての有限ブール代数は，その原子の集合のベキ集合代数である．これは，有名な**ストーン**の表現定理の特別な場合である．その定理は，すべてのブール代数がそのすべての超フィルターの集合の部分集合からなるある**体**と同形である，と述べている．その体は，一般に完全なベキ集合ではない．（部分集合の体は，単に，有限個の部分集合の和集合および共通部分，そして補集合に関して，閉じている部分集合の空でない集合のことである．）

参考文献

Halmos (1960) の最初の 10 章は，素朴集合論の本書で用いられた部分に対するすぐれた導入を与えてくれる．それに代わるものとしては，Stoll (1961) を参考にするとよい．有限次元ベクトル空間論について，最良の教科書は Shephard (1966) である．数学的ヒルベルト空間論に対する予備知識として，より高度な，しかし強く推奨できるのは，Simmons (1963) である．束論とブール代数の理論についてのより詳しい内容は，Bell and Machover (1977) の第 4 章で与えられている．

訳者による補足

1. ラドン－ニコディムの定理とグリーソンの定理（本文 36 頁）

この関係を理解するには，広義ルベーク積分の知識が必要になるので，ここでは，単に，2 つの定理を，その類似性が読み取れるような形で定式化するにとどめよう．

$\mathscr{M}$ を集合 X の部分集合からなる σ 加法族（可算和演算と補演算に関して閉じている集合族），ν を $\mathscr{M}$ 上の σ 有限な測度（任意の $E\in\mathscr{M}$ を有限な測度をもつ可算個の集合でおおうことができる）とする．このとき，ラドン－ニコディムの定理は，次のように表わされる．

R－D：

$\mathscr{M}$ の上の集合関数 μ が ν 絶対連続（すなわち，任意の $E\in\mathscr{M}$ に対して，$\nu(E)=0$ ならば $\mu(E)=0$）な測度となるための必要十分条件は，ある ν 可積分関数 f が存在して，任意の $E\in\mathscr{M}$ に対して，

$$\mu(E)=\int_E f\mathrm{d}\nu$$

と表わされることである．

この f は，ν 測度 0 を除いて一意に定まる．

他方，$\mathbb{H}$ を可分なヒルベルト空間，$\mathscr{I}_1$ をそのトレース族とする．トレース Tr は，$\mathbb{H}$ の正規直交基底 $\{\phi_k\}$ をとり，$A\in\mathscr{I}_1$ に対して，

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_k(\phi_k,\ A\phi_k)$$

と定義する．この値は，正規直交基底のとりかたに依存しない．さらに，$\{P_j\}$ を互いに直交する射影作用素の列とすると，任意の $A\in\mathscr{I}_1$ に対して，

$$\mathrm{Tr}(A\sum_j P_j)=\sum_j \mathrm{Tr}(AP_j)$$

が成立する．$\mathbb{H}$ の射影作用素全体の集合を $\mathscr{P}$ とすると，グリーソンの定理は，次のように表わされる．

D：

$\mathbb{H}$ の次元が 3 以上のとき，$\mathscr{P}$ の上の汎関数 μ が確率測度となるための必要十分条件は，ある統計作用素 W が存在して，任意の $P \in \mathscr{P}$ に対して，

$$\mu(P) = \mathrm{Tr}(PW)$$

と表わされることである．

統計作用素 W とは，$\mathrm{Tr}(W)=1$ を満足する正値作用素（すなわち，任意の $\phi \in \mathbb{H}$ に対して，$(\phi, W\phi) \geqq 0$）のことで，$\mathscr{I}_1$ の要素となり，また，PW も $\mathscr{I}_1$ の要素となる．

2. 統計的因果性のロバストネス条件（本文 114 頁）

スピン $\dfrac{1}{2}$ 粒子のスピンは次のように扱うことができる．

空間に直交座標系を固定して，通常の仕方で x，y，z 軸と名づける．それぞれの方向のスピン成分に対応する作用素（の 2 倍）を σ_x，σ_y，σ_z で表わし，これらの作用素をベクトルの x，y，z 成分のように見なして，

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

と書く．単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ の方向の作用素 σ_n は，ベクトルの内積をとる演算にならって，

$$\sigma_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$$

で表わされる．これらの作用素が作用する空間は，2 次元複素ベクトル空間（$\mathbb{H}_2$）である．とくに，$\{|\sigma_z=1\rangle, |\sigma_z=-1\rangle\}$ を基底にとって σ_x，σ_y，σ_z を行列で表わすと，パウリ行列となる．

粒子のスピン状態は，$\mathbb{H}_2$ の単位ベクトルで表わされる．状態の変化は，$\phi \in \mathbb{H}_2$ に作用する 2 次元特殊ユニタリ変換群 $SU(2)$ の要素 $u(\boldsymbol{n}, \phi) = e^{i\sigma \cdot n\phi/2}$ で表わされる．これは，関数 e^x の級数展開を用いて，$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})^2 = \boldsymbol{I}$（恒等作用素）を考慮すると，

$$e^{i\sigma \cdot n\phi/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\frac{\phi}{2}\right)^k$$

$$= \boldsymbol{I}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\dfrac{\phi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\dfrac{\phi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos\frac{\phi}{2}\boldsymbol{I} + i\sin\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

となる．この変換は，3 次元物理空間における粒子の状態の回転に対応し，したがっ

て回転群 $SO(3)$ の要素に対応する.

第4章の (56), (57), (58) の計算のために, $\mathbb{H}_B$ に $u(\boldsymbol{n}, -\phi)$ を作用させると, 摂動を与えられた状態 $|\Psi'\rangle$ が式 (45) で表現され, 作用素 σ_B は $R(\boldsymbol{n}, \phi)\sigma_B$ となる. 一般に (52) が成立するが, 左辺は,

$$\begin{pmatrix} u(\boldsymbol{n}, \phi)\sigma_x u(\boldsymbol{n}, -\phi) \\ u(\boldsymbol{n}, \phi)\sigma_y u(\boldsymbol{n}, -\phi) \\ u(\boldsymbol{n}, \phi)\sigma_z u(\boldsymbol{n}, -\phi) \end{pmatrix}$$

を表わし, 右辺は行列と列ベクトルの積の演算となっている. 本文の式の変形は, 行列とベクトルの演算と同様に考えればよい.

3. マーク法（本文114頁）

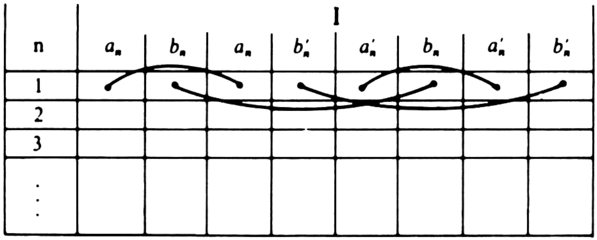
これは, 因果的過程と非因果的過程を区別するための視点の1つであり, ライヘンバッハによる. 因果的過程においては, その過程に撹乱（マーク (mark)）を与えると, その後の過程にこの撹乱（マーク）が伝えられていくが, 非因果的過程では, マークはその後の過程に伝達されない. たとえば, 走行している車の時々刻々の状態を考えると, これらの状態の系列は, 因果的過程と考えられる. したがって, 走行中に飛んできた石が当たってボンネットにキズができたならば, そのキズ（マーク）は, その後の走行においても, ついたままである（少なくとも, 修理するまでは). すなわち, マークはその後の過程に伝達されていく. 他方, 道路にうつる車の影の時々刻々の状態の系列は, 因果的過程ではない. したがって, 道路の窪みによって車の影が歪んでも, この歪み（マーク）はその後の影の状態に伝達されない.

4. ベルの不等式（本文98頁）

見解 A は, 系が所有している（物理量の）値が系の「状態」および周囲の状況にどのように依存するかについて, 何も述べていない (LOC_3 は, それが局所的にしか依存しないことを主張している).

周囲の状況を, とにかく, 1つに固定した上で（たとえば, A メータ, B メータを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に固定した上で), 対の系が所有する $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ 方向の値を考えるのであれば, 図13に対応する図は, 次頁のようになる. (全体がⅠとなっていることに注意.)

このとき調和条件（にあたる条件）が満足されることは自明であり, $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $c(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$, $c(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $c(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ も定義され, ベルの不等式が成立する. しかし, この場合に, $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の値を実験的に定めることはできるけれども, この項以外の3



つの c の値を実験的に定めることはできない．なぜなら，いまの場合，**a**′，**b**′ 方向の値は，実験装置を **a**′，**b**′ ではなくて **a**，**b** に固定したときの値であるから，実験的にこの **a**′，**b**′ の値を見出すことができないからである．したがって，c(**a**，**b**′)，c(**a**′，**b**)，c(**a**′，**b**′) の値も実験的に定めることができない．いまの場合，FM のもとで，実験的に値を定めることができるのは，c(**a**，**b**) のみである．

したがって，c の 4 つの値を実験的に決定できるようにするためには，本文の図 13 のように，各対に 4 つの実験状況 I～IV を（条件法的に）考えることになる．そうすると，たとえば，n 番目の対について，I における a_n と II における a_n が等しいという保証は（見解 A においても）なくなる（状況が異なっているのだから）．しかし，ベルの不等式を導くためには，これらは等しくなければならない．これが（所有値についての）調和条件であり，この条件が成立することを保証するのが，LOC_3 と決定主義である．（なお，I のときに所有される a'_n と III，IV のときに所有される a'_n が等しいという保証はないが，これは必要ない．）

参考文献

〔＊は原書第2刷で補われた文献〕

ARAKI, H. A. and YANASE, M. M. (1960): 'Measurement of Quantum Mechanical Operators', *Physical Review* **120**, 622－6. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 707－11.

ARTHURS, E. and KELLY, J. L. (1965): 'On the Simultaneous Measurement of a Pair of Conjugate Observables', *Bell System Technical Journal* **44**, 725－9.

ASPECT, A., GRANGIER, P., and ROGER, G. (1981): 'Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem', *Physical Review Letters* **47**, 460－7.

——, ——, and —— (1982): 'Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell's Inequalities', *Physical Review Letters* **48**, 91－4.

——, DALIBARD, J., and ROGER, G. (1982): 'Experimental Tests of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers', *Physical Review Letters* **49**, 1804－7.

BELINFANTE, F. J. (1973): *A Survey of Hidden-Variable Theories*, Oxford: Pergamon Press.

BELL, J. L. and HALLETT, M. (1982): 'Logic, Quantum Logic and Empiricism', *Philosophy of Science* **49**, 355－79.

—— and MACHOVER, M. (1977): *A Course in Mathematical Logic*, Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland.

BELL, J. S. (1964): 'On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox', *Physics* **1**, 195－200. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 403－8.

—— (1966): 'On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics', *Reviews of Modern Physics* **38**, 447－75. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 397－402.

—— (1971): 'Introduction to the Hidden-Variable Question', in B. d'Espagnat (ed.), *Foundations of Quantum Mechanics*, Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi', Course IL. New York: Academic Press, 171－81.

＊—— (1987): *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press.

BELTRAMETTI, F. G. and van FRAASSEN, B. (eds.) (1981): *Current Issues in Quantum Logic*, New York: Plenum.

BIRKHOFF, G. and von NEUMANN, J. (1936): 'The Logic of Quantum Mechanics',

Annals of Mathematics **37**, 823–43.
BOHM, D. (1951): *Quantum Theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 〔ボーム『量子論』, 高林武彦・河辺六男・後藤邦夫・井上健訳, みすず書房, 1964〕
BOHR, N. (1934): *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge: Cambridge University Press.
—— (1935): 'Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?', *Physical Review* **48**, 696–702. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 145–51 .
—— (1958): *Atomic Physics and Human Knowledge*, New York: Wiley.
—— (1963): *Essays 1958–1962 on Atomic Physics and Human Knowledge*, New York: Interscience.
〔BOHR (1934), (1958), (1963) の邦訳——ボーア『原子理論と自然記述』, 井上健訳, みすず書房, 1990〕
BOWIE, G. L. (1979): 'The Similarity Approach to Counterfactuals: Some Problems', *Noûs* **13**, 477–98.
BRODY, T. A. (1980): 'Where Does the Bell Inequality Lead?', unpublished manuscript.
—— and DE LA PEÑA-AUERBACH, L. (1979): 'Real and Imagined Nonlocalities in Quantum Mechanics', *Il Nuovo Cimento* **54B**, 455–62.
BROWN, H. R. (1986): 'The Insolubility Proof of the Quantum Measurement Problem', *Foundations of Physics* **16**, 857–70.
—— and REDHEAD, M. L. G. (1981): 'A Critique of the Disturbance Theory of Indeterminacy in Quantum Mechanics', *Foundations of Physics* **11**, 1–20.
BUB, J. (1976): 'Hidden Variables and Locality', *Foundations of Physics* **6**, 511–25.
—— (1980): 'Comment on "Locality and the Algebraic Structure of Quantum Mechanics" by William Demopoulos', in Suppes (1980), 149–53.
CLAUSER, J. F. and HORNE, M. A. (1974): 'Experimental Consequences of Objective Local Theories', *Physical Review* **D10**, 526–35.
—— and SHIMONY, A. (1978): 'Bell's Theorem: Experimental Tests and Implications', *Reports on Progress in Physics* **41**, 1881–927.
* CLIFTON, R. K., BUTTERFIELD, J. and REDHEAD, M. L. G. (1990): 'Nonlocal Influences and Possible Worlds — A Stapp in the Wrong Direction', *The British Journal for the Philosophy of Science* **41**, 5–58.
* CLIFTON, R. K. and REDHEAD, M. L. G. (1988): 'The Compatibility of CP Violating Systems with Statistical Locality', *Physics Letters A*, **126**, 295–9.
DEMOPOULOS, W. (1980): 'Locality and the Algebraic Structure of Quantum Mechanics', in Suppes (1980), 119–44.
D'ESPAGNAT, B. (1976): *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, 2nd

edn., Reading, Mass.: Benjamin.〔デスパーニア『量子力学における観測の理論』, 町田茂訳, 岩波書店, 1980〕

—— (1984): 'Nonseparability and the Tentative Descriptions of Reality', *Physics Reports* **110**, 201−64.

DIRAC, P. A. M. (1958): *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th edn., Oxford: Clarendon Press.〔ディラック『量子力学』, 朝永振一郎・玉木英彦・木庭二郎・大塚益比古・伊藤大介訳, 岩波書店, 1968〕

DUMMETT, M. (1976): 'Is Logic Empirical?', in H. D. Lewis (ed.), *Contemporary British Philosophy*, London: George Allen and Unwin, 45−68.

EBERHARD, P. H. (1977): 'Bell's Theorem without Hidden Variables', *Il Nuovo Cimento* **38B**, 75−80.

—— (1978): 'Bell's Theorem and the Different Concepts of Locality', *Il Nuovo Cimento* **46B**, 392−419.

EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., and ROSEN, N. (1935): 'Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?' *Physical Review* **47**, 777−80. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 138−41〔アインシュタイン／ポドルスキー／ローゼン「物理的実在についての量子力学的記述は完全であると考えることができるであろうか」, 谷川安孝訳 (『アインシュタイン選集・1』所収), 共立出版, 1971〕

ELLIS, B. (1966): *Basic Concepts of Measurement*, Cambridge: Cambridge University Press.

FINE, A. (1970): 'Insolubility of the Quantum Measurement Problem', *Physical Review* **2D**, 2783−7.

—— (1974): 'On the Completeness of Quantum Theory', *Synthese* **29**, 257−89. Reprinted in Suppes (1976), 249−81.

—— (1979): 'Counting Frequencies: A Primer for Quantum Realists', *Synthese* **42**, 145−54.

—— (1981): 'Correlations and Physical Locality', in P. Asquith and R. Giere (eds.), *PSA 1980*, vol. 2, East Lansing, Michigan: Philosophy of Science Association, 535−62.

—— (1982a): 'Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities', *Physical Review Letters* **48**, 291−5.

—— (1982b): 'Joint Distributions, Quantum Correlations, and Commuting Observables', *Journal of Mathematical Physics* **23**, 1306−10.

—— and TELLER, P. (1977): 'Algebraic Constraints on Hidden Variables', *Foundations of Physics* **8**, 629−37.

FITCHARD, E. E. (1979): 'Proposed Experimental Test of Wave Packet Reduction and the Uncertainty Principle', *Foundations of Physics* **9**, 525−35.

FOLSE, H. J. (1985): *The Philosophy of Niels Bohr*, Amsterdam: North-Holland.

FRIEDMAN, M. and GLYMOUR, C. (1972): 'If Quanta Had Logic', *Journal of Philosophical Logic* **1**, 16–28.

—— and PUTNAM, H. (1978): 'Quantum Logic, Conditional Probability and Inference', *Dialectica* **32**, 305–15.

GASIOROWICZ, S. (1974): *Quantum Physics*, New York: Wiley.

GHIRARDI, G. C., RIMINI, A., and WEBER, T. (1980): 'A General Argument against Superluminal Transmission through the Quantum Mechanical Measurement Process', *Lettere al Nuovo Cimento* **27**, 293–8.

* GIBBINS, P. (1987): *Particles and Paradoxes: The Limits of Quantum Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

GLEASON, A. M. (1957): 'Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space', *Journal of Mathematics and Mechanics* **6**, 885–93. Reprinted in Hooker (1975), 123–33.

GOLDBLATT, R. I. (1974): 'Semantic Analysis of Orthologic', *Journal of Philosophical Logic* **3**, 19–35.

HAACK, S. (1978): *Philosophy of Logics*, Cambridge: Cambridge University Press.

HALMOS, P. R. (1960): *Naive Set Theory*, Princeton, NJ: Van Nostrand.

HARDEGREE, G. M. (1974): 'The Conditional in Quantum Logic', *Synthese* **29**, 63–80. Reprinted in Suppes (1976), 55–72.

HARPER, W. L., STALNAKER, R., and PEARCE, G. (eds.) (1981): *Ifs: Conditionals, Belief, Decision, Chance, and Time*, Dordrecht: Reidel.

HEALEY, R. (1979): 'Quantum Realism: Naïveté is No Excuse' *Synthese* **42**, 121–44.

HEISENBERG, W. (1930): *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Chicago: University of Chicago Press. 〔ハイゼンベルク『量子論の物理的基礎』, 玉木英彦・遠藤真二・小出昭一郎訳, みすず書房, 1954〕

HELLMAN, G. (1982): 'Stochastic Einstein-Locality and the Bell Theorems', *Synthese* **53**, 461–504.

HEYWOOD, P. and REDHEAD, M. L. G. (1983): 'Nonlocality and the Kochen-Specker Paradox', *Foundations of Physics* **13**, 481–99.

HOLDSWORTH, D. G. and HOOKER, C. A. (1983): 'A Critical Survey of Quantum Logic', in *Logic in the 20th Century, Scientia Special Issue*, 127–246.

* HONNER, J. (1987): *The Description of Nature: Niels Bohr and the Philosophy of Quantum Physics*, Oxford: The Clarendon Press.

HOOKER, C. A. (ed.) (1975): *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, vol. 1, Dordrecht: Reidel.

HOWARD, D. (1985): 'Einstein on Locality and Separability', *Studies in History and Philosophy of Science* **16**, 171–201.

HUMPHREYS, P. (1980): 'A Note on Demopoulos's Paper "Locality and the

Algebraic Structure of Quantum Mechanics"', In Suppes (1980), 145−7.
JAMMER, M. (1974): *The Philosophy of Quantum Mechanics*, New York: Wiley. 〔ヤンマー『量子力学の哲学』上・下，井上健訳，紀伊国屋書店，1983−84〕
JARRETT, J. (1984): 'On the Physical Significance of the Locality Conditions in the Bell Arguments'. *Noûs* **18**, 569−89.
JAUCH, J. M. (1968): *Foundations of Quantum Mechanics*, Reading, Mass.: Addison-Wesley.
JORDAN, T. F. (1983): 'Quantum Correlations Do Not Transmit Signals', *Physics Letters* **94A**, 264.
KITCHER, P. (1981): 'Explanatory Unification', *Philosophy of Science* **48**, 507−31.
KOCHEN, S. and SPECKER, E. (1967): 'The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics', *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59−87. Reprinted in Hooker (1975), 293−328.
KRIPS, H. (1974): 'Foundations of Quantum Theory, Part I', *Foundations of Physics* **4**, 181−93.
—— (1977): 'Quantum Theory and Measures on Hilbert Space', *Journal of Mathematical Physics* **18**, 1015−21.
*—— (1987): *The Metaphysics of Quantum Theory*, Oxford: The Clarendon Press.
LANDAU, L. J. (1987): 'On the Violation of Bell's Inequality in Quantum Theory', *Physics Letters* **120 A**, 54−6.
LEPLIN, J. (ed.) (1983): *Scientific Realism*, Berkeley: University of California Press.
LEWIS, D. (1973): *Counterfactuals*, Oxford: Blackwell.
—— (1979): 'Counterfactual Dependence and Time's Arrow', *Noûs* **13**, 455−76.
LO, T. K. and SHIMONY, A. (1981): 'Proposed Molecular Test of Local Hidden-Variable Theories', *Physical Review* **23A**, 3003−12.
MACKEY, G. (1963): *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New York : Benjamin.
McKNIGHT, J. L. (1958): 'An Extended Latency Interpretation of Quantum Mechanical Measurement', *Philosophy of Science* **25**, 209−22.
MACZYNSKI, M. J. (1971): 'Boolean Properties of Observables in Axiomatic Quantum Mechanics', *Reports on Mathematical Physics* **2**, 135−50.
MARGENAU, H. (1954): 'Advantages and Disadvantages of Various Interpretations of the Quantum Theory', *Physics Today* **7**, 6−13.
MARSHALL, T. W., SANTOS, E., and SELLERI, F. (1983): 'Local Realism has not been Refuted by Atomic Cascade Experiments', *Physics Letters* **98A**, 5−9.
MATTHEWS, P. (1974): *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd edn., London: McGraw-Hill.

MELLOR, D. H. (1971): *The Matter of Chance*, Cambridge: Cambridge University Press.

MESSIAH, A. (1968): *Quantum Mechanics*, New York: Wiley. 〔メシア『量子力学』I・II・III，小出昭一郎・田村二郎訳，東京図書，1971－72〕

*MURDOCH, D. (1987): *Niels Bohr's Philosophy of Physics*, Cambridge: Cambridge University Press.

PAGE, D. N. (1982): 'The Einstein-Podolsky-Rosen Physical Reality is Completely Described by Quantum Mechanics', *Physics Letters* **91A**, 57－60.

PARK, J. L. (1973): 'The Self-Contradictory Foundations of Formalistic Quantum Measurement Theories', *International Journal of Theoretical Physics* **8**, 211－18.

—— and MARGENAU, H. (1968): 'Simultaneous Measurability in Quantum Theory', *International Journal of Theoretical Physics* **1**, 211－83.

PERES, A. (1978): 'Unperformed Experiments Have no Results', *American Journal of Physics* **46**, 745－7.

—— and ZUREK, W. H. (1982): 'Is Quantum Theory Universally Valid?' *American Journal of Physics* **50**, 807－10.

PERRIE, W., DUNCAN, A. J., BEYER, H. J., and KLEINPOPPEN, H. (1985): 'Polarization Correlation of the Two Photons Emitted by Metastable Atomic Deuterium', *Physical Review Letters* **58**, 1790－3.

PIPKIN, F. M. (1978): 'Atomic Physics Tests of the Basic Concepts in Quantum Mechanics', *Advances in Atomic and Molecular Physics* **14**, 281－340.

PIRON, C. (1972): 'Survey of General Quantum Physics', *Foundations of Physics* **2**, 287－314. Reprinted in Hooker (1975), 513－43.

POPPER, K. R. (1934): *Logik der Forschung*, Vienna: Springer. English translation, London : Hutchinson, 1959. 〔ポパー『科学的発見の論理』上・下，大内義一・森博訳，恒星社厚生閣，1971－72〕

—— (1957): 'The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability, and the Quantum Theory', in S. Körner (ed.), *Observation and Interpretation*, London: Butterworths, 65－70, 88－9.

—— (1967): 'Quantum Mechanics without "The Observer"', in M. Bunge (ed.), *Quantum Theory and Reality*, Berlin: Springer, 7－44.

—— (1982a): *The Open Universe: An Argument for Indeterminism*, London: Hutchinson.

—— (1982b): *Quantum Theory and the Schism in Physics*, London: Hutchinson.

—— (1983): *Realism and the Aim of Science*, London: Hutchinson.

PRUGOVEČKI, E. (1981): *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2nd edn., New York and London: Academic Press.

PUTNAM, H. (1969): 'Is Logic Empirical?', *Boston Studies in the Philosophy of Science* **5**, 216–41.

—— (1974): 'How to Think Quantum-Logically', *Synthese* **29**, 55–61. Reprinted in Suppes (1976), 47–53.

—— (1981): 'Quantum Mechanics and the Observer', *Erkenntnis* **16**, 193–219.

REDHEAD, M. L. G. (1980): 'Models in Physics', *British Journal for the Philosophy of Science* **31**, 145–63.

—— (1981): Experimental Tests of the Sum Rule', *Philosophy of Science* **48**, 50–64.

—— (1983): 'Relativity, Causality and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox: Nonlocality and Peaceful Coexistence', in R. Swinburne (ed.), *Space, Time and Causality*, Dordrecht: Reidel, 151–89.

—— (1986): 'Relativity and Quantum Mechanics — Conflict or Peaceful Coexistence', *Annals of the New York Academy of Sciences*, **480**, 14–20.

—— (1987): 'Whither Complementarity?' in N. Rescher (ed.) *Scientific Inquiry in Philosophical Perspective*, Lanham: University Press of America, 169–82.

*—— (1989): 'Nonfactorizability, Stochastic Causality and Passion-at-a-Distance', in J. Cushing and E. McMullin (eds.), *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, Notre Dame: Notre Dame University Press, 145–53.

—— (1990): 'Undressing Baby Bell', in R. Bhaskar (ed.), *Harrē and His Critics*, Oxford: Blackwell, 122–8.

REICHENBACH, H. (1928): *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, Berlin: Walter der Gruyter. English translation, New York: Dover, 1958.

—— (1956): *The Direction of Time*, Berkeley and Los Angeles: University of California Press.

ROBERTSON, H. P. (1929): 'The Uncertainty Principle', *Physical Review* **34**, 163–4. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 127–8.

SALMON, W. (1984): *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*, Princeton: Princeton University Press.

SCHEIBE, E. (1973): *The Logical Analysis of Quantum Mechanics*, Oxford: Pergamon.

SCHIFF, L. (1968): *Quantum Mechanics*, 3rd edn., London: McGraw-Hill. 〔シッフ『量子力学』上・下, 井上健訳, 吉岡書店, 1957–58〕

SELLERI, F. and TAROZZI, G. (1980): 'Is Clauser and Horne's Factorizability a Necessary Requirement for a Probabilistic Local Theory?', *Lettere al Nuovo Cimento* **29**, 533–6.

SHE, C. Y. and HEFFNER, H. (1966): 'Simultaneous Measurement of Noncommuting Observables', *Physical Review* **152**, 1103–10.

Shephard, G. C. (1966): *Vector Spaces of Finite Dimension*, Edinburgh and London: Oliver & Boyd.

Shimony, A. (1978): 'Metaphysical Problems in the Foundations of Quantum Mechanics', *International Philosophical Quarterly* **18**, 3–17.

—— (1981): 'Critique of the Papers of Fine and Suppes', in P. Asquith and R. Giere (eds.), *PSA 1980* vol. 2, East Lansing, Michigan: Philosophy of Science Association, 572–80.

—— (1984): 'Controllable and Uncontrollable Non-Locality' in S. Kamefuchi *et al.* (eds.), *Proceedings of the International Symposium: Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, Tokyo: Physical Society of Japan, 225–30.

Simmons, G. F. (1963): *Introduction to Topology and Modern Analysis*, New York: McGraw-Hill.

Slote, M. A. (1978): 'Time in Counterfactuals', *The Philosophical Review* **87**, 3–17.

Stapp, H. (1971): 'S-Matrix Interpretation of Quantum Theory', *Physical Review* **D3**, 1303–20.

* —— (1989): 'Quantum Nonlocality and the Description of Nature', in J. Cushing and E. McMullin (eds.): *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, Notre Dame: Notre Dame University Press, 153–74.

Stoll, R. R. (1961): *Sets, Logic and Axiomatic Theories*, San Francisco: Freeman.

Suppes, P. (ed.) (1976): *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, Dordrecht: Reidel.

—— (ed.) (1980): *Studies in the Foundations of Quantum Mechanics*, East Lansing, Michigan: PSA.

——and Zanotti, M. (1976): 'On the Determinism of Hidden Variable Theories with Strict Correlation and Conditional Statistical Independence of Observables', in Suppes (1976), 445–55.

Svetlichny, G., Redhead, M. L. G., Brown, H. R. and Butterfield, J. (1988): 'Do the Bell Inequalities Require the Existence of Joint Probabilities?', *Philosophy of Science*, **55**, 387–401.

Thomason, R. and Gupta, A. (1980): 'A Theory of Conditionals in the Context of Branching Time', *The Philosophical Review* **89**, 65 – 90. Reprinted in Harper *et al.* (1981), 299–322.

Van Fraassen, B. (1972): 'A Formal Approach to the Philosophy of Science', in R. Colodny (ed.), *Paradigms and Parodoxes*, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 303–66.

—— (1973): 'Semantic Analysis of Quantum Logic', in C. A. Hooker (ed.), *Contemporary Research in the Foundations and Philosophy of Quantum*

Theory, Dordrecht: Reidel, 80−113.

—— (1974): 'The Labyrinth of Quantum Logic', *Boston Studies in the Philosophy of Science* **13**, 224−54. Reprinted in Hooker (1975), 577−607.

—— (1979): 'Hidden Variables and the Modal Interpretation of Quantum Theory', *Synthese* **42**, 155−65.

VARADARAJAN, V. S. (1968): *Geometry of Quantum Theory*, 2 vols., Princeton, NJ: Van Nostrand. 〔(1985): 2nd edn., Berlin: Springer.〕

VON NEUMANN, J. (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Springer. English translation, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1955. 〔フォン・ノイマン『量子力学の数学的基礎』, 井上健・広重徹・恒藤敏彦訳, みすず書房, 1957〕

WHEELER, J. A. and ZUREK, W. H. (eds.) (1983): *Quantum Theory and Measurement*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

WIGNER, E. P. (1952): 'Die Messung quantenmechanischer Operatoren', *Zeitschrift für Physik* **133**, 101−8.

—— (1970): 'On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities', *American Journal of Physics* **33**, 1005−9.

YANASE, M. M. (1961): 'Optimal Measuring Apparatus', *Physical Review* **123**, 666−8. Reprinted in Wheeler and Zurek (1983), 712−14.

訳者あとがき

ここに訳出したのは，Michael Redhead: *Incompleteness, Nonlocality and Reality — a Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics* (2nd impression, Clarendon, Oxford, 1989) の全体である．第1刷は1987年に出版された．いわゆるBellの不等式に対する実験がほぼ否定的な決着を見たのは1980年代前半のことであるが，この結末が量子力学の哲学的問題に対する（何度目かの）関心を呼び覚まし，物理学者，数学者，哲学者らによって，著作，論文集，雑誌論文といった形で夥しいほどの文献が世に出ることになった．その中にあって，本書は，科学哲学の専門家の手になる入門の段階から専門的な議論までを含んだきわめて優れた書物であり，1988年には科学哲学への顕著な貢献に対しておくられるLakatos賞を受賞している．

著者のレッドヘッド教授は，1929年の生まれ，ロンドン大学ユニバーシティ・カレッジで物理学を修め，その後20年近くを家業に携わったのち1968年に再び大学に戻り数理物理学で学位を取得した．しかし，優秀な成績で物理学を修めながらも，物理学の基本的な概念をゆっくり検討する暇が与えられなかったことに不満を感じ，また量子力学がいわゆる「ブラック・ボックス理論」として与えられたことに不満を感じていた彼は，ほどなく同じロンドン大学のチェルシー・カレッジ科学史科学哲学大学院課程で科学哲学を学び，同カレッジ講師（科学哲学），教授（物理学の哲学），キングズ・カレッジ教授（物理学の哲学）を経て，1987年よりケンブリッジ大学の独立学科である科学史科学哲学科の主任教授である．経歴から分かるように学究生活は40歳を過ぎてから始めたのであるが，物理学の哲学，とくに量子論の哲学に関する論文を次々に発表し（純粋に物理学の論文はカレッジを卒業したときと学位を取得したときのとあわせて3篇があるに過ぎない），文字どおり英国科学哲学界の重鎮である．その間に英国科学哲学会の会長も務めている．彼の関心は，現代理論物理学とくに量子力学と相対性理論の概念的方法論的問題にある．

本書は，まえがきにあるように，学生のための参考書とすることを意図して書き始められ，確かに，量子力学の哲学への入門書になってはいる．しかし，第4章や

第6章の非局所性や遠距離相関に関する分析はレッドヘッド教授自身の学術論文に基づく専門的なもので，多くの雑誌論文で参考文献として引用されるほどのレベルであり，入門書の域を越えている．したがって，読者は一度に全体を読みとおすことができなくても，くじけずに他の書物をあわせて読みながら1年かそれ以上かけてゆっくり読んでいかれるとよいであろう．多くの個所で微妙な議論が扱われているので，読んで理解して頭に定着させるためにはそれなりの時間が必要となるであろう．本書は，ボームの隠れた変数理論にも，エヴェレット－ドゥ・ウィットの多世界解釈にもまったく触れていないので，量子力学の哲学に関する議論の全体を概観する書物にはなっていない．しかし，本書を読みとおすことができれば，ただのお話のレベルではなく，量子力学が扱う世界の実相についての学問的な議論を理解し，自分でも組み立てるだけの素地ができるであろう．

著者自身が述べているように，本書は非相対論的量子力学と線形代数学の初歩の知識があれば読めるような形になっている．しかし，量子力学そのものへの入門書をも必要とされる読者は，

Hughes, R. I. G.: *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press, 1989

Albert, D. Z.: *Quantum Mechanics and Experience*, Haravard University Press, 1992〔アルバート『量子力学の基本原理——なぜ常識と相容れないのか』高橋真理子訳，日本評論社，1997〕

を読まれるとよいであろう．これらは，量子力学の解説を含み，本書よりももう少し初歩の段階の，量子力学の哲学への入門書となっている．ちなみに，Albert の本は，ボームの隠れた変数理論に1章をあて，またエヴェレット－ドゥ・ウィットの多世界解釈にもふれている．

著者と同様，訳者も，本書が哲学系の人たちにも物理系の人たちにも読まれることを望んでいる．さらには，人間が行なう認識と認識される世界との関係について関心を持ち，きちんとした議論に接したいと思っている人たちにも読まれることを希望している．しかしそうは言っても，著者が読者として第一に念頭においた哲学系の人たち（訳者もこの人たちにぜひ読んでもらいたいのだが）は，わが国の大学の哲学科の現状からすると，本書を読むのに非常な困難を感じるであろう．そこで，主として哲学系の人に，本書を読む際のアドバイスを少しさせていただきたい．哲学系の人たちにとって，記号論理学はほぼ必須に近い科目になっているであろう．その延長上で，彼らにとっては物理学よりも数学のほうが勉強しやすいと感じる分野ではないだろうか．物理学の勉強のしにくさの1つは，物理系の学生用に書かれ

た教科書は論証の形で書かれていても，哲学系の人から見るとそれを論証とは認めがたいと感じられるところにあるようである．飛躍があって容易にはその間隙を埋めることができなかったり，明らかに論理的に導かれないことが論理的帰結として述べられていたりする．哲学系の人は演繹的な論理には慣れており敏感になっているが，物理学者が用いる類推や自然さによる推論がなかなか共有できないようである．そこで，本書を読むために量子力学の勉強から始める必要を感じておられる哲学系の読者には，先に上げた2著を読まれるにしても，より進んだ段階を目指してまず数学の勉強から始められるよう薦めたい．演習問題が手際よく解けなくても，数学の基本的な概念に慣れるようにして，量子力学理論の数学的構造から量子力学に入っていかれてはどうであろうか．たとえば，

志賀浩二: 数学30講シリーズ，朝倉書店

の線形代数，微分積分，位相など適当な巻を読まれてから，少しきついけれども，

Prugovečki, E.: *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2nd edition, Academic Press, 1981

Beltrametti, E. G. and Cassinelli, G.: *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1981

に取り組まれてはどうであろうか．前者にはルベーク積分の解説も含まれている．後者は，現在絶版であるが，丸善を通してトロント大学の UT Back-in-Print Project によって手に入れることができる．

量子力学の哲学について自分の立場をはっきり押し出した書物で，本書以後のものとして，

Healey, R.: *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1989

Van Fraassen, B.: *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, Oxford University Press, 1991

Bub, J.: *Interpreting the Quantum World*, Cambridge University Press, 1997

がある．いずれも科学哲学者の手になるもので，とくにBubの書物は，量子力学の解釈問題に対する現在の主要な観点のすべてを批判検討するという作業を含んでいるので，この問題に関する概観を得るのにも役に立つ．上記3つとも，量子力学の数学的形式に関する解説を含んでいる．以上は，すべて非相対論的量子力学を扱ったものである．

場の量子論への入門書としては，やはり科学哲学者の手になる

Teller, P.: *An Interpretive Introduction to Quantum Field Theory*, Princeton University Press, 1995

が，数学や物理学のテクニカルな側面に可能な限りわずらわされずに場の量子論の本質に近づきたいと思っている人にとっては，とてもよい本である．ただし，かなりの程度数学と物理学に，そしてもちろん哲学にも，慣れている必要があるかもしれない．

ともあれ，存在論や認識論は哲学の重要な分野であろう．そうであるならば，現代物理学が抱えている存在と認識に関する深刻な問題について，哲学系の人が一通りの理解を持っておくことは必要であろうし，また，これらの問題の解決には，哲学系の人たちの助力も必要に思われるのである．

本書の翻訳を計画したのは1989年のことであったが，訳者が片方の目の視力をほとんど役に立たないほどに失うという出来事や，翻訳の出版を引き受けてくれたみすず書房の事情もあって，出版が遅れに遅れてしまった．その間，本書の何人かの未来の読者から，問い合わせと励ましをいただいた．また，レッドヘッド教授をも「出版は望みないのか」と嘆かせたりもしたが，ここにやっと出版にこぎつけることができた．物理学に関する訳語や言い回しについては，北海道大学名誉教授金沢昭氏（素粒子物理学）と少壮物理学者の内山智氏に貴重な助言をいただいた．記して感謝の意を表したい．もちろん，残っているかもしれない誤読，誤訳は訳者のものである．また，みすず書房の原純夫氏には非常に面倒な数式の入力を完璧にしていただいたし，文体についての助言もいただいた．厚く感謝したい．

本書によって量子力学の哲学についての関心が深まることを願いつつ．

1997年11月

石垣壽郎

索　引

名前の付けられた原理は太字で示す.

ア

アインシュタイン局所性（Einstein locality） **83**
その破れ　121, 123-125
アインシュタインの実在性基準（R′）（Reality Criterion）　86-87
アインシュタイン（Einstein）のジレンマ　84-85, 91
アインシュタイン－ポドルスキー－ローゼン（EPR）の論証　79-90
完全性条件（P）（Completeness Condition） **79**
実在性条件（R）（Reality Condition） **80**
図解　84
スピン（spin）による言い換え　82, 87-89
同等な要約　84
ボーアの反応　7, 86, 90
アスペ（Aspect）の実験　120-125
図式的表現　122
光円錐構造　122-123
光スイッチ　123-124
値の規則（VR）（Value Rule）　**133**, 157, 166
値のわり当て（量子力学的オブザーバブル）　132
アリストテレス自然学　55

1次元ユニタリ変換群 $U(1)$　115
1重項状態（singlet state）
回転不変性　47
2つのスピン1粒子　48-49
2つのスピン1/2粒子　47-48, 82
意味論的接近法（選択肢をなす論理に対する）　170
因子分解可能性（factorizability）（確率的隠れた変数理論）　111
演繹メタ定理　169, 180
遠隔感応（passion-at-a-distance）　118, 130, 186
遠隔作用（action-at-a-distance）　118, 185

オブザーバブル（observable）
値のわり当て　132
その関数　22-28
定義　11

カ

「解釈」の意味　50-51, 76
解釈（量子力学の）　50-76
見解 A: 隠れた変数（hidden-variables） **52-54**, 85, 101, 129, 132, 147-148
見解 B: 傾向性ないし潜在性（propensities /potentialities） **54-56**, 85, 101, 129, 185
見解 C: 相補性（complementarity） **56-58**, 86, 101, 129, 185
可換オブザーバブル
量子力学的結合確率分布　24
可換性関係　15, 39
角運動量　38-46
合成系の　46-49
参考文献　49
拡張された値の規則（EVR）（Extended Value Rule） **158**
「確定的（definite）」の意味　105
確率測度　33
隠れた変数による解釈（hidden-variable interpretation）　7, 52-54
下降作用素　39-40
可分性（separability）　118, 185, 186
存在論的局所性（Ontological Locality）をも見よ
ヒルベルト空間　193
可補束（complemented lattice）の定義　194
環境的局所性（ELOC）（Environmental Loca-

lity）　**156**
その破れ　166
環境的文脈性（environmental contextuality）　155
関数的合成の原理（FUNC）(Functional Composition Principle)　**134**
その正当化　145-153
STAT FUNC に対する関係　145-147
FUNC'（FUNC の制限）　151-152
完全性条件（completeness condition）
EPR の論証　79
確率的隠れた変数理論（stochastic hidden-variable theory）　110
ヒルベルト空間　193
完全性メタ定理（Completeness Metatheorem）　**171**
記号的表現　171
観念主義（idealism）　56
γ 線顕微鏡の例　74-75
γ 線偏極相関実験　119-120

記号列の定義　170
基本命題　173, 180
逆関数の定義　188
逆像の定義　188
共通部分（集合の）の定義　187
共役（線形作用素の），定義　191
行列表現　190
行列力学　16
局所性（locality）の仮定
確率的隠れた変数理論（stochastic hidden-variable theory）　111
局所性原理（Locality Principle）
環境的局所性（ELOC）（Environmental Locality）　**156**
存在論的局所性（OLOC）（Ontological Locality）　**155**
L 定式化　83
LOC_1 定式化　85, 129
LOC_2 定式化　86, 129
LOC_3 定式化　91-92, 129
LOC_4 定式化　100, 129
LOC_5 定式化　125, 129
局所的極大オブザーバブル（locally maximal observable）　154
モンチンスキー（Maczynski）の定理の拡張　155, 167
局所的反事実的確定性の原理（PLCD）（Principle of Local Counterfactual Definiteness）　**102**
「確定的（definite）」の意味　105-106
極大オブザーバブル（maximal observable）
局所的極大（locally maximal）　154
それらの代数的構造と整合的な FUNC'　153
許容性基準（Admissibility criteria）**（真理付値に対する）**
A_1 許容性基準　176
A_2 許容性基準　181

空集合の定義　187
グリーソン（Gleason）の定理　33-36, 142
クレブシュ－ゴルダン（Clebsch-Gordon）係数　46-47

傾向性（propensity）　54-58, 77
系の状態
パトナム状態　180
量子力学的状態　11, 180
ベルの不等式における仮定　98-99, 186
ケットの定義　12
ゲーデル（Gödel）の結果　79
見解 A（量子力学の隠れた変数解釈）（hidden-variable interpretation）　**52-54**, 85, 101, 129, 132, 147-148
コッヘン－シュペッカーのパラドクスから逃れることの拒否　148-149
見解 B（量子力学の傾向性解釈）（potentiality interpretation）　**54-58**, 85, 101, 129, 185
見解 C（量子力学の相補性解釈）（conplementarity interpretation）　**56-58**, 86, 101, 129, 185
原子（atom）（ブール代数の）　195

光学的光子相関実験　119-126
公理　170-171
コッヘン－シュペッカー（Kochen-Specker）図
定義　139-140
矛盾的　143-144

コッヘン－シュペッカーのパラドクス　132-153
証明　134-145
定義　134
と非局所性　154-167
逃れる方法　148-149
古典物理学の論理　173-175
古典命題計算
意味論（semantics）　171
統語論的（syntactic）概念　170-171
古典命題論理　170-173
コペンハーゲン相補性解釈（Copenhagen complementarity interpretation）　56-58
固有値スペクトル　14
固有値の定義　191
固有ベクトルの規則（Eigenvector Rule）　**81, 133**
混合状態（mixed state）　21

サ

最小道具主義解釈（minimal instrumentalist interpretation）（量子力学の）　50-51
最小量子論理（MQL）（minimal quantum logic）　177
作用素の表記法　13-14
参考文献　203-212
3次元回転群 $SO(3)$　116

時間を含まないシュレディンガー方程式　17
時間を含むシュレディンガー方程式　18
時間的反事実的事象（tensed counterfactual）　104
時間発展（time evolution）（測定理論における）　63
自己共役作用素
定義　191
その関数　191
実在主義（realism）
とパトナム状態　180-183
と量子論理　168-184
実在主義的解釈（量子力学の）　54, 55, 56
実在性基準，アインシュタインの定式化（R′）　86-87
実在性原理（FUNCの証明のための）　147
コッヘン－シュペッカーのパラドクスから逃れることの拒否　150-151
実在性条件（EPRの論証）　80
実質含意（material implication）
演算　180
記号　178
実用主義的決定主義（pragmatic determinism）　100
射影公準（Projection Postulate）　66, 77
射影作用素
オブザーバブルの関数としての　22
直交性質　22
定義　19, 21, 191
役割　29
射影束（projection lattice）　29, 30, 176
射線（ray）
射影作用素との関係　27-28, 29
定義　13
写像の定義　188
集合論　187-188
シュレーディンガー（Schrödinger）の描像　18
純粋状態（pure state）　21
準同形写像（ブール代数の）　195-196
準同形定理　172, **196**
上昇作用素　39
真部分集合の定義　187

推論規則　170
数学的付録　187-197
スカラーの定義　189
スタップ－エバーハード（Stapp-Eberhard）の接近法（ベルの不等式に対する）　100-107
ストーン（Stone）の表現定理　196
スピンの定義　38
スピン・ハミルトニアン　45, 145, 163
スピン量子数　46
スペクトル規則　133
スペクトル定理　19, 192
いくつかの証明　19-20

整式（well-formed formula）（wff）の定義　170
積の規則（Product Rule）　**136,** 153
説明の本質　51, 76-77

潜在性解釈（potentiality interpretation）（量子力学の）　54-56
潜在的量（latent-quantity）の概念　55, 77
選択肢としての論理への接近法　170

相似的モデルの必要性　51
相補性（complementarity）
　定義　57
　ボーア（Bohr）の見解　58, 77
　量子力学の解釈　56-58
測定
　古典物理学の見方　57, 59, 77
　測定の量子論　58-66, 77
測定の状態準備（state-preparation）的側面　59, 65, 66
束（lattice）の定義　28, 194
束論（lattice theory）　194-196
存在論的局所性（OLOC）　155
　その破れ　166, 185
存在論的決定主義（ontological determinism）　100, 124
存在論的文脈性（ontological contextuality）　150

タ

対応規則（Correspondence Rule）**（Corr）**　**147**
　コッヘン－シュペッカーのパラドクスから逃れることの拒否　148-149
妥当性の記号　171
多様体の定義　35
多粒子系の量子力学　36-38

値域の定義　188
忠実な測定の原理（FM）（Faithful Measurement Principle）　**99, 110, 133**
超フィルターの定義　195
超フィルター定理　172, **196**
調和条件（Matching Condition）**（ベルの不等式の証明のための）**　**98,** 101-102
直補元（orthocomplement）の条件　194

低エネルギー陽子－陽子散乱実験　119-120
定義域の定義　188
ディラックの定式化　12-18
　統計アルゴリズム（statistic algorism）　14-15
　量子化アルゴリズム（quantization algorizm）　13-14
ディラック（Dirac）のデルタ関数　16
ディラックの描像　18, 128
ディラックのベクトル記法　12, 190
定理であること（theoremhood）に対する記号　171
デカルト積（集合の）の定義　188
テンソル積
　線形作用素の　37, 192
　定義　192
　ディラックの表記法　37-38
　ベクトルの　36-37, 192
　ベクトル空間の　36-37, 192

統計アルゴリズム（statistical algorithm）　11
　ディラックの定式化　14-15
　フォン・ノイマンの定式化　18, 20-22
統計作用素　21
　測定理論　60-66
統計的隠れた変数理論（stochastic hidden-variable theory）　109-118
　因子分解可能性　**111**
　完全性の仮定　**110**
　局所性の仮定　**111,** 118
　参考文献　130
統計的関数合成原理（STAT FUNC）（Statistical Functional Composition Principle）　**24**
　FUNC に対する関係　145-147
統計的因果性のロバストネス条件（robustness condition for stochastic causality）　113-118
統計的非局所性　125-129
統語論的接近法（syntactic approach）（選択肢をなす論理（alternative logics）に対する）　170
同時測定可能値の規則（Comeasurable Value Rule）**（CVR）**　**158**
　値の規則（Value Rule）と FUNC* からの導出　159
　局所性との非両立性　162-166

特殊相対論（SR）と非局所性　83, 185, 186
特性代数（characteristic algebra）　172, 184
ド・モルガンの法則　179
トレース測度　36

ナ

2次元特殊ユニタリ変換群 $SU(2)$　115
2次元ユニタリ変換群 $U(2)$　114
2色定理　137
　2次元において不成立であること　137-138
　ベリンファンテ（Belinfante）の証明　138-139

ハ

ハイゼンベルク（Heisenberg）の描像　18
パウリ（Pauli）のスピン作用素　41
ハッセ（Hasse）の図　29, 32
　定義　29
波動関数の定義　16
パトナム（Putnam）状態
　定義　180
　と実在主義　180-183
バナッハ（Banach）代数　33
反事実的事象（counterfactual）　98, 100-107, 167
　参考文献　104, 129
反事実的条件法（counterfactual conditional）
　記号　103
　真理条件　103-105
半順序集合（poset）（partially ordered set）の定義　194

光スイッチ　122-124
非局所性（nonlocality）
　とコッヘン－シュペッカーのパラドクス　154-167
　とベルの不等式　91-131
非決定主義（indeterminism）　100-107, 109
飛行時間の例　72-74
描像可能性（picturability）　51
ヒルベルト空間
　3次元の　31, 34
　射影束　29, 30, 31, 33, 176
　そのブール部分束　31
　超球面の色づけ　137
　定義　193

ファジー値オブザーバブル　54-55
ファン・フラッセン（van Fraassen）のオブザーバブル分裂の接近法　150-152, 154
フォン・ノイマン（von Neumann）の証明（隠れた変数の不可能性（impossibility of hidden-variable）に対する）　7
フォン・ノイマンの定式化（量子力学の）　18-22
　統計アルゴリズム（statistical algorithm）　18, 20-22
　量子化アルゴリズム（quantization algorithm）　18
不確定性関係（uncertainty relation）　66-76
　攪乱理論（Disturbance Theory）　74-75, 77
　参考文献　77
不確定性関係の攪乱理論（Disturbance Theory of uncertainty relation）　74-75, 77
不可思議な性質（量子力学の）　57
不完全性論証，アインシュタイン－ポドルスキー－ローゼン（EPR）の　79-90
部分集合の定義　187
ブラの定義　12
プランク（Planck）定数　15
ブール束
　定義　29, 194
　ヒルベルト空間の射影束（projection lattice）による置き換え　29, 176
ブール代数
　準同形写像　195-196
　定義　194
　表現（representation）　196
ブール部分束　29, 31
分散のない状態（dispersion-free state）の不可能性（量子力学における）　69-70, 77
分配束の定義　194
文脈性（contextuality）
　環境的（environmental）　155
　存在論的　150
　非局所性との関係　154-157
分離不能性（nonseparability）　118, 154, 166, 185, 186

平和共存（非局所性と特殊相対論の）　186
ベキ集合の定義　188
ベキ集合代数ないし束　194
　ハッセの図　30, 31
ベキ等作用素　191
ベクトル（ディラックの表記法）　12, 190
ベクトル空間
　線形作用素　189
　線形汎関数　190
　定義　189
　内積　189
ベクトル空間論　189-193
ベル局所性（Bell locality）　83
　その破れ　121
ベル（Bell）の実験　92-93
　アスペ（Aspect）の考え方　121-125
　可視光子相関の考え方　119-125
　γ線偏極相関（polarization correlation）の考え　119-120
　低エネルギー陽子－陽子散乱の考え方　119-120
ベル（Bell）の不等式　91-100
　実験的テスト　118-125
　スタップ－エバーハード（Stapp-Eberhard）の接近法　100-107
　その変形　107-109
　調和条件（Matching Condition）　**98, 101**
　なされた仮定　98-100
　　決定主義（determinism）の仮定　98-99, 186
　　ランダム性の仮定　99
　なされていない仮定　100
　非決定主義的（indeterministic）証明　109-112
　量子力学における破れ　95, 96

ポアソン（Poisson）括弧の定義　15
ボーア（Bohr）の見解（量子力学の）　7, 56-58
　参考文献　77
補集合の定義　187

マ

無知解釈，混合状態の　60, 77
結び（union）（集合の）の定義　187

メタ定理（M）　172

モンチンスキー（Maczynski）の定理　149, 153
　局所的極大オブザーバブル（locally maximal observable）への拡張　155, 167

ヤ

ユークリッド的3次元ベクトル空間　34

ラ

ラドン－ニコディム（Radon-Nikodym）の定理　36
ランダム性（randomness）（ベルの不等式の仮定）　99

リース－フィッシャー（Riesz-Fischer）の定理　193
理想的測定　59, 66-67, 77
量子化アルゴリズム（quantization algorithm）　11, 133
　ディラックの定式化　13-14
　フォン・ノイマンの定式化　18
量子力学
　角運動量　38-46
　その解釈　50-78
　その形式　11-49
　多粒子系　36-38, 46-49
量子力学の形式　11-49
量子論理
　古典論理との比較　177
　定義　32, 168, 176
量子命題論理　176-180
理論の性質　50

連結多様体の定義　35
連続性の位相的定義　35-36

ロー－シモニー（Lo-Shimony）の実験　121, 130
ロバストネス条件（robustness condition）（確率的因果性）（stochastic causality）　113-118
論理－代数的接近法（logico-algebraic ap-

proach)　28-33
参考文献　49
代数的接近法との比較　33
定義　33
論理的結合子 (logical connective)
記号　170
集合論の同等な演算　174
束の同等な演算　176
論理的同値性の記号　177
論理の改訂可能性 (revisability of logic)
168-170

ワ

和の規則 (Sum Rule)　**134-135,** 153

著者略歴

(Michael L. G. Redhead)

1929年に生まれる．ロンドン大学ユニバーシティ・カレッジ卒業（物理学）．20年近く家業に携わったのち，1968年に大学に戻り数理物理学で Ph. D. を取得し，さらにロンドン大学チェルシー・カレッジ科学史科学哲学大学院課程で科学哲学を学ぶ．同カレッジ講師（科学哲学），教授（物理学の哲学），キングス・カレッジ教授（物理学の哲学）を経て，1987年よりケンブリッジ大学科学史科学哲学科の主任教授．その間，英国科学哲学会の会長も務めている．現代理論物理学，とくに量子力学と相対性理論の概念的方法論的問題に関心がある．1988年に科学哲学への顕著な貢献に対しておくられる Lakatos 賞を受賞した本書の他に，*Physics for Pedestrians*（Cambridge University Press, 1989），*From Physics to Metaphysics*（Cambridge University Press, 1995）の著書がある．

訳者略歴

石垣壽郎〈いしがき・としお〉 1941年に生まれる．東京大学教養学部（科学史科学哲学）卒業．東京大学人文科学研究科博士課程（哲学）中退．現在，北海道大学理学研究科教授．博士（理学）（科学基礎論）．量子力学の解釈問題，時空の存在論的問題に関心がある．訳書 ワルター・シュルツ『変貌した世界の哲学・I，科学化の動向』（共訳，二玄社，1978），カール・ポパー『推測と反駁』（共訳，法政大学出版局，1980）．

マイケル・レッドヘッド
不完全性・非局所性・実在主義
量子力学の哲学序説
石垣壽郎訳

1997年12月5日　印刷
1997年12月16日　発行

発行者 小熊勇次
発行所 株式会社 みすず書房 〒113 東京都文京区本郷5丁目32-21
電話 3814-0131(営業) 3815-9181(編集)
本文印刷所 鈴山堂整版所
扉・表紙・カバー印刷所 栗田印刷
製本所 鈴木製本所

© 1997 in Japan by Misuzu Shobo
Printed in Japan
ISBN 4-622-04101-4
落丁・乱丁本はお取替えいたします

皇帝の新しい心 コンピュータ・心・物理法則	R.ペンローズ 林　一訳	5800
数学における発明の心理	J.アダマール 伏見康治他訳	2200
ガロアと群論	L.R.リーバー 浜稲雄訳	2400
数学へのプレリュード	W.W.ソーヤー 宮本敏雄他訳	2000
数値計算入門 計算機のための数学	R.W.ハミング 芹沢正三訳	1500
存在から発展へ 物理科学における時間と多様性	I.プリゴジン 小出昭一郎他訳	4800
混沌からの秩序	I.プリゴジン他 伏見康治他訳	3800
複雑性の探究	I.プリゴジン他 安孫子誠也他訳	5000
確実性の終焉	I.プリゴジン 安孫子・谷口訳	3400

（消費税別）

みすず書房

仁科芳雄 日本の原子科学の曙	玉木英彦他編	3600
二十世紀の科学者	G. クラウザー 金関義則他訳	2200
科学の饗宴	有馬朗人他	1700
科学と読書	鎮目恭夫	2000
科学革命の構造	T. S. クーン 中山茂訳	2200
本質的緊張 1 科学における伝統と革新	T. S. クーン 安孫子誠也他訳	2000
本質的緊張 2 科学における伝統と革新	T. S. クーン 安孫子誠也他訳	3300
中世の自然学	E. グラント 横山雅彦訳	2500
科学と西洋の世界制覇	メンデルスゾーン 常石敬一訳	2200
相対論の形成 広重徹科学史論文集1	西尾成子編	4500
原子構造論史 広重徹科学史論文集2	西尾成子編	5800

（消費税別）

みすず書房

科学とは何か	ブロノフスキー 三田博雄他訳	1400
一般システム理論	ベルタランフィ 長野　敬他訳	3800
人間機械論	N. ウィーナー 鎮目恭夫他訳	2400
神童から俗人へ わが幼時と青春	N. ウィーナー 鎮目　恭夫訳	2300
発明	N. ウィーナー 鎮目　恭夫訳	2500
多様化世界 生命と技術と政治	F. ダイソン 鎮目　恭夫訳	3600
科学・人間・組織	P. カピッツァ 金光不二夫訳	1500
ソ連における科学と政治	メドヴェジェフ 熊井　譲治訳	2500
科学と現代についての省察	ラビノヴィチ 八木　勇訳	750
アインシュタイン平和書簡　1	O. ネーサン他編 金子　敏男訳	2300
アインシュタイン平和書簡　3	O. ネーサン他編 金子　敏男訳	2300
科学と民主制	プライス 中村　陽一訳	1600

（消費税別）

みすず書房

量子力学　I　＜第2版＞	朝永振一郎	3000
量子力学　II　＜第2版＞	朝永振一郎	6000
角運動量とスピン　『量子力学』補巻	朝永振一郎 亀淵　迪 他編	4100
物理学読本＜第2版＞	朝永振一郎編	2300
Scientific Papers of TOMONAGA 1	宮島竜興編	9000
Scientifc Papers of TOMONAGA 2	宮島竜興編	12000
角運動量の基礎理論	M. E. ローズ 山内・森田他訳	4200
科学と情報理論	L. ブリルアン 佐藤　洋訳	6500
クォーク　物質の究極を求めて	H. フリッチ 山田作衛訳	2200
熱統計学 2	D. テル＝ハール 田中友安他訳	2000
量子力学　＜第4版＞（リプリント）	ディラック	4100

（消費税別）

みすず書房